

GESTION

GESTION

Thierry RONCALLI **La Gestion des Risques Financiers**

La gestion des risques financiers est en pleine évolution sous la pression de la réglementation prudentielle et du développement des outils pour mieux les maîtriser. Le Comité de Bâle a publié le Nouvel Accord sur le ratio international de solvabilité (Bâle II) le 26 juin 2004, et la Commission Européenne a déjà adopté les différentes propositions de cet accord. Cet accord a été accueilli favorablement par la profession bancaire et les établissements financiers ont maintenant deux ans et demi pour mener à bien cette réforme afin d'en bénéficier pleinement.

Les banques n'ont cependant pas attendu le Nouvel Accord pour moderniser leur gestion des risques. Depuis dix ans, on assiste à un développement technique du risk management et les modèles pour mesurer les risques sont de plus en plus sophistiqués. Le Nouvel Accord participe à cette évolution, puisqu'il vise à définir un capital réglementaire plus proche du capital économique obtenu avec les modèles internes.

Le présent ouvrage s'inscrit dans ces deux lignes directrices : réglementation du risque et modélisation du risque. Il s'adresse aussi bien à des étudiants de troisième cycle, qui désirent acquérir une culture financière du risque et de sa gestion, qu'à des professionnels qui cherchent à mieux comprendre les fondements de la modélisation mathématique du risque.

*
* *

*Docteur ès Sciences économiques, **Thierry RONCALLI** est responsable Risk Analytics du Groupe de Recherche Opérationnelle du Crédit Agricole S.A. et professeur associé d'économie à l'Université d'Évry. Il a été auparavant Research Fellow au Financial Econometric Research Centre de la City University Business School et membre du Laboratoire d'Analyse et de Recherche économique de l'Université de Bordeaux.*

Auteur de nombreux articles de finance et d'économie, il a aussi écrit deux livres sur le langage de programmation GAUSS et développé la bibliothèque numérique TSM de séries temporelles et d'ondelettes.

ISBN 2-7178-4891-6

35 €



9 782717 848915

ECONOMICA

La Gestion des Risques Financiers

Thierry RONCALLI

Préface de Antoine FRACHOT

PRÉFACE

La gestion des risques d'une banque s'est considérablement développée depuis dix ans d'une part en termes de périmètre couvert et d'autre part quant aux moyens mis en œuvre pour couvrir ce périmètre.

En effet, s'agissant du périmètre, la volonté de surveiller l'exhaustivité des risques est manifeste : un exemple est celui des risques opérationnels qui, il y a encore quelques années, n'étaient pas ou peu surveillés alors qu'ils font désormais l'objet d'une véritable démarche de gestion des risques, à l'image de celle adoptée sur le risque de crédit et de marché.

Pour ce qui concerne les moyens, il n'y a pas non plus d'ambiguïté : les directions de risque se sont toutes renforcées tant en quantité qu'en technicité. Les équipes ont été étoffées et le niveau de technicité exigé d'un risk manager s'est fortement élevé.

C'est à tous ces défis que l'ouvrage de Thierry Roncalli s'attaque.

La gestion des risques bancaires et financiers s'est considérablement sophistiquée ces dernières années

Si on prend l'exemple des trois grandes classes de risque d'une banque – risque de crédit, risque de marché, risque opérationnel – il est évident que la technicité requise, ne serait-ce que pour répondre aux exigences réglementaires, a fortement augmenté. Les exemples abondent : l'utilisation des modèles internes Value-at-Risk sur les risques de marché du portefeuille de négociation ou sur les risques opérationnels, les formules dites IRB du texte Bâle II pour calculer l'exigence de fonds propres du risque

de contrepartie, le calibrage de ces formules en taux de défaut, taux de récupération, la mesure des effets de corrélation, etc. Ces questions, qui ne se posaient quasiment pas il y a dix ans, nécessitent désormais des ingénieurs de très haut niveau pour être traitées correctement.

Quelles en sont les raisons ? La plupart sont bien connues. Il y a en premier lieu une pression des marchés vers davantage de sophistication : les produits « plain vanilla » que toutes les banques savent construire, vendre et gérer finissent toujours par dégager des marges faibles, à la limite de la rentabilité. Inversement, les produits complexes et innovants, sous réserve qu'ils répondent à une demande, ont des marges plus élevées, tout au moins tant qu'un savoir-faire spécifique et rare est nécessaire pour les gérer. La loi du marché conduit donc spontanément les banques (et d'ailleurs toutes les industries) à investir des territoires toujours plus sophistiqués. Concrètement, il peut aussi bien s'agir d'un produit dérivé exotique (banque de marché), d'un financement de projet complexe (banque commerciale), d'un prêt immobilier avec toutes sortes d'options (banque de détail), etc. Le risk management étant bien obligé de comprendre les produits et d'appréhender leurs risques, la sophistication du risk management suit – et si tout va bien, d'assez près – celle des front offices.

En deuxième lieu, la réglementation en elle-même pousse à la sophistication. Certes, il s'agit d'abord de répondre à la sophistication des marchés, comme décrit à l'instant, mais la réglementation bancaire est structurellement tentée d'aller plus loin. La faillite d'une banque occasionne des dommages collatéraux lourds à l'ensemble de l'économie. En outre, contrairement aux autres industries, les banques sont mal contrôlées par leurs créanciers – les déposants – car ces derniers ont peu de compétences et pas la motivation pour se charger de ce contrôle. Toutes ces raisons, à la base de la théorie de la réglementation bancaire, sont bien connues des micro-économistes et servent à justifier une réglementation spécifique et particulièrement exigeante du secteur bancaire.

La sophistication est aussi la résultante d'un souci de transparence. Que ce soit via les normes comptables IFRS, le pilier III de Bâle II, la loi de Sarbanes-Oxley, etc., il existe une exigence forte et généralisée pour accroître la transparence des comptes, des ratios financiers, des indicateurs de toute sorte. À cet égard, cette transparence passe par la publication de chiffres, censés synthétiser l'état des risques, comme le paradigme de la Fair Value des normes comptables, la Value-at-Risk pour les risques de marché et bientôt risques opérationnels et risques de crédit, l'Earnings-at-Risk, etc.

Enfin, la sophistication du risk management est aussi le résultat de la recherche des gains de productivité. Les plans de cost-cutting dans une industrie comme la banque visent essentiellement à maîtriser les frais de personnel et à n'utiliser l'intervention humaine que sur les tâches à

haute valeur ajoutée. En gestion des risques, cela signifie très concrètement de développer des outils statistiques d'aide à la décision (score, système expert) ou des indicateurs de risque synthétiques, accroissant encore la sophistication.

La sophistication de la gestion des risques génère elle-même des risques

Cette sophistication a donc une justification et une légitimité claires mais elle pose un certain nombre de problèmes qu'il ne faut pas sous-estimer.

En premier lieu, la complexité est évidemment plus difficile à maîtriser. L'utilisation des méthodes de quantification du risque génère des nouveaux risques : risque opérationnel de mauvaise implémentation d'un outil ou d'un indicateur de risque, de mauvaise compréhension, de calibration défectueuse, etc. On peut penser par exemple à la méfiance qu'on peut avoir vis-à-vis d'un mark-to-model quand on sait que certains paramètres du modèle sont connus avec une précision très relative (paramètre de corrélation par exemple dans un pricer de produits multi sous-jacents ou dans un pricer de dérivés de crédit).

Un risque apparaît également lorsque l'existence d'un outil de risque sophistiqué induit une confiance excessive et conduit les risk managers à abdiquer leur esprit critique ou les enseignements de leur expérience. Il est désormais acquis qu'un outil comme la Value-at-Risk est certes indispensable pour suivre les risques de marché mais ne suffit pas pour se sentir « confortable ». En outre, on oublie parfois la réalité économique dans laquelle ces outils sont utilisés. Si on prend l'exemple du suivi des dérivés sur inflation, il est symptomatique que les ingénieurs en charge de construire des modèles de pricing soient d'abord des matheux avant d'être des économistes et pour qui l'inflation est d'abord un « processus stochastique » avant d'être une variable macro-économique.

La sophistication de la réglementation pourrait paradoxalement générer aussi des risques pour la stabilité des systèmes financiers. En effet, toute réglementation suscite des comportements de contournement de la part des acteurs qui y sont soumis, notamment quand cette réglementation est très « prescriptive » comme celle que le Comité de Bâle est en train de mettre en place sur le risque de crédit. On constate parallèlement une propagation des dérivés de crédit vers des sphères moins réglementées et moins compétentes telles que les hedge funds et les gestionnaires d'actifs, voire les directions financières des grands corporates. Entre Warren Buffet qui assimile les dérivés de crédit à une « arme de destruction massive » et Alan Greenspan qui met au crédit de ces mêmes produits la résistance (i.e. la « résilience ») des systèmes financiers ces dernières années, il y a une opposition totale que seule l'expérience future permettra de départager.

avec $\hat{\mu}_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j}/n$. Dans RiskMetrics, l'estimation est différente et utilise une approche moyenne mobile pour pondérer les observations :

$$\hat{\Sigma}_{j_1, j_2} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_{i, j_1} - \hat{\mu}_{j_1}) (x_{i, j_2} - \hat{\mu}_{j_2})$$

RiskMetrics impose la méthode de la moyenne mobile exponentielle : plus la date d'observation est récente, plus le poids associé est important. Nous avons :

$$\lambda_i = \frac{(1 - \lambda) \lambda^{i-1}}{(1 - \lambda^n)}$$

en supposant que $i = 1$ corresponde à la date d'observation la plus récente et $i = n$ corresponde à la date la plus ancienne de l'historique. Remarquons que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{(1 - \lambda) \lambda^{i-1}}{(1 - \lambda^n)} = \frac{1}{n}$$

Le graphique 12 représente la fonction λ_i pour n égal à 250 jours. Nous constatons que plus la valeur de λ est petite, plus les observations récentes ont de l'influence sur l'estimation. Nous pouvons nous intéresser à la contribution des p premières observations, c'est-à-dire à la somme $\sum_{i=1}^p \lambda_i$. Nous voyons parfaitement le caractère exponentiel de la méthode RiskMetrics. Ainsi, pour $\lambda = 0,94$ (valeur retenue par RiskMetrics), 50% des poids concernent les 12 premières observations¹⁰. Et ceci est indépendant de la taille de l'échantillon, contrairement aux poids constants.

2.4. Les produits exotiques

La gestion du risque des produits exotiques est beaucoup plus complexe que celle des produits linéaires (Rebonato, 2001 ; Derman, 2001). Considérons le cas simple d'un portefeuille contenant une action $S(t)$ et une option d'achat $C(t)$ sur cette action. La valeur du portefeuille à l'instant t est $P(t) = S(t) + C(t)$. À l'instant $t + 1$, nous avons $P(t + 1) = S(t + 1) + C(t + 1)$. Nous en déduisons la valeur du PnL :

$$\begin{aligned} \text{PnL} &= P(t + 1) - P(t) \\ &= (S(t + 1) - S(t)) + (C(t + 1) - C(t)) \end{aligned}$$

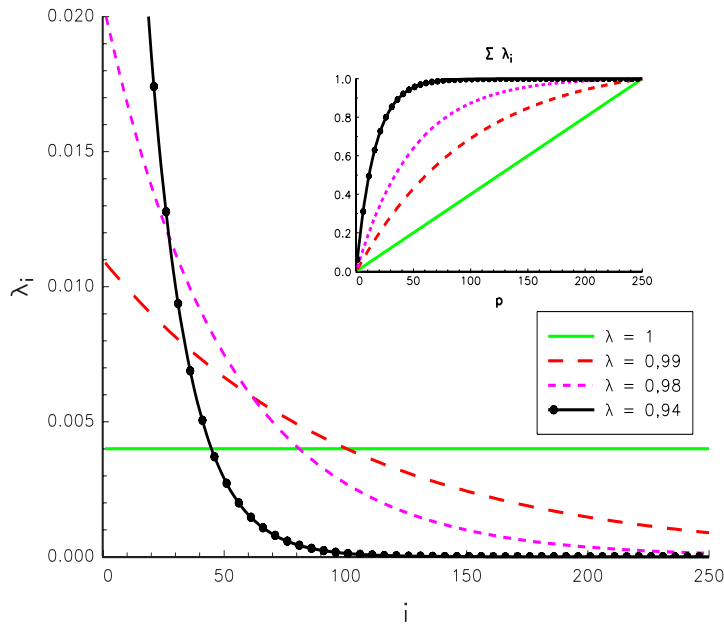
Nous sommes tentés de décomposer ce PnL de la façon suivante :

$$\text{PnL} = (1 + r_S) S(t) + (1 + r_C) C(t)$$

avec r_S et r_C les rendements journaliers de l'action et de l'option d'achat et d'identifier deux facteurs de risque. Ceci est inexact puisque l'option d'achat est une fonction du sous-jacent $C(t) = f(S(t))$. Il n'y a donc qu'un seul facteur de risque. De plus, comme la fonction f est non linéaire, il n'est pas facile d'utiliser une VaR analytique.

¹⁰Et 75% et 95% des poids correspondent aux 23 et 49 premières observations.

Graphique 12. Poids d'une moyenne mobile exponentielle



2.4.1. L'identification des facteurs de risque

Les facteurs de risque sont souvent explicites pour les produits linéaires, ce qui n'est pas le cas pour les produits exotiques. Considérons une option européenne d'achat d'une action de maturité T et de prix d'exercice ou *strike* K . Dans le modèle de Black et Scholes, le prix de l'option est égal à $C = S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)$ avec $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln\frac{S}{K} + rT) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$. Étant donné une valeur de volatilité σ , la formule de Black et Scholes permet de donner un prix à l'option puisque tous les autres paramètres sont objectifs. Dans la pratique, elle est utilisée pour calculer la volatilité étant donné le prix de l'option. On observe alors que la volatilité n'est pas constante en fonction du strike, c'est le phénomène de *volatility smile* ou *volatility skew*. De plus, même pour un strike donné, la volatilité n'est pas constante en fonction de la maturité T . On obtient donc une nappe de volatilité $\Sigma(T, K)$. Ces volatilités calculées (à partir des options standards ou *produits vanilles*) sont désignées sous le terme de volatilités implicites. Elles vont servir à calculer les prix de produits exotiques. Nous venons d'identifier un second facteur de risque.

Plus généralement, les produits exotiques sont évalués avec un modèle et un certain nombre d'inputs. L'analyse du *pricer* (produit + modèle + inputs) permet de définir les facteurs de risque. Par exemple, pour les produits equity, ce sont principalement les nappes de volatilité et les prix des sous-jacents. Il serait cependant simpliste d'assimiler les facteurs de risque

à des paramètres du modèle. Par exemple, les facteurs de risque peuvent affecter indirectement les paramètres du modèle. C'est par exemple le cas des modèles dont les paramètres sont calibrés. Dans ce cas, les facteurs de risque sont le plus souvent le set de calibration et non les paramètres calibrés.

2.4.2. Les différentes méthodes pour calculer la VaR

Nous rappelons que $PnL = a(X_1(t+1), \dots, X_K(t+1)) - P(t)$. La méthode la plus utilisée pour calculer la valeur en risque des produits exotiques est de très loin la *VaR* historique. Outre l'implémentation classique, on peut aussi calculer la *VaR* historique en utilisant une approximation du *PnL*, par exemple en considérant les sensibilités aux facteurs de risque. Le calcul de la *VaR* par les sensibilités est la méthode dite *dégradée* par opposition à la méthode dite *full pricing*. Prenons un exemple pour bien comprendre les différences.

Considérons l'actif A de l'exemple 2. Soit une option d'achat européenne sur cet actif de maturité 1 an et de strike égal à 250. La volatilité implicite actuelle est de 23%. La valeur du portefeuille est $P(t) = \theta_S S(t) + \theta_C C(t)$ avec $\theta_S = -1$ et $\theta_C = 10$. Nous supposons pour l'instant un seul facteur de risque, le rendement de l'actif. Nous notons $C(t) = f(S(t))$. Nous avons :

$$PnL = \theta_S r_S S(t) + \theta_C (f((1+r_S)S(t)) - C(t))$$

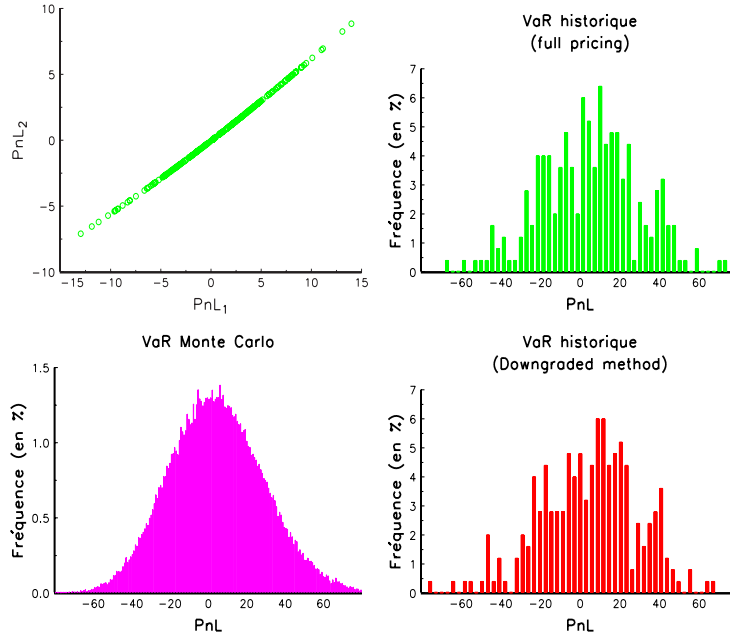
Pour calculer la valeur en risque historique, il suffit de calculer les 250 valeurs de *PnL* en utilisant les valeurs historiques de r_S . Notons que, pour être parfaitement exacte, la valorisation de $C(t+1)$ doit utiliser une maturité égale à un an moins un jour. Nous obtenons une valeur en risque égale à 55,78 euros. Nous représentons sur le graphique 13 l'histogramme des 250 *PnL*s calculés – le graphe de $PnL_1 = r_S S(t)$ contre $PnL_2 = f((1+r_S)S(t)) - C(t)$ illustre bien le fait qu'il n'y a pas deux facteurs de risque, mais un seul. À titre de comparaison, nous pouvons calculer la *VaR* Monte Carlo en considérant que le facteur est gaussien. Nous obtenons une *VaR* égale à 49,27 euros. Pour la méthode dégradée, nous avons :

$$\begin{aligned} PnL &= \theta_S (S(t+1) - S(t)) + \theta_C (C(t+1) - C(t)) \\ &\simeq \theta_S r_S S(t) + \theta_C \Delta r_S S(t) \end{aligned}$$

avec $\Delta = \partial_S C$ le delta de l'option. Cette méthode est particulièrement intéressante lorsque le pricing est très long. Nous n'avons plus à valoriser 251 fois le produit exotique, mais une seule fois. Pour la méthode dégradée, nous obtenons une *VaR* égale à 60,89 euros.

Remarque 17. *La méthode dégradée peut être combinée à la méthode full pricing. Pour cela, on calcule les PnLs avec la méthode dégradée et on identifie les pires cas. On applique alors la méthode full pricing seulement à ces pires cas.*

Graphique 13. Distribution du PnL lorsque le facteur de risque est le rendement de l'actif



Remarque 18. On appelle portefeuille delta neutre le portefeuille insensible aux variations du 1^{er} ordre du sous-jacent, c'est-à-dire $\theta_S r_S S(t) + \theta_C \Delta r_S S(t) = 0$ ou encore :

$$\theta_S = -\theta_C \Delta$$

Nous considérons maintenant qu'il y a deux facteurs de risque : le rendement du sous-jacent et la volatilité. Nous avons $C(t) = f(S(t), \sigma(t))$ d'où :

$$\text{PnL} = \theta_S r_S S(t) + \theta_C (f((1 + r_S) S(t), \sigma(t + 1)) - C(t))$$

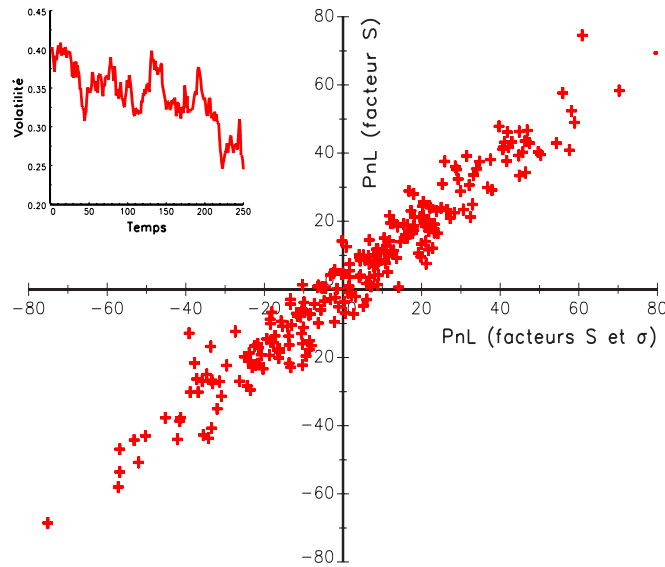
Pour choquer la volatilité, nous pouvons considérer que $\sigma(t + 1) = (1 + r_\sigma) \times \sigma(t)$. Nous obtenons pour la valeur en risque historique un montant de 57,02 euros. Avec la prise en compte de ce second facteur, la VaR augmente de 1,24 euro soit 2,2%.

Remarque 19. La mise en place d'une VaR dégradée n'est pas plus difficile que précédemment, il suffit de prendre en compte le risque de véga en plus du risque de delta.

2.4.3. Le backtesting

Lorsqu'on utilise un modèle pour calculer des prix, on parle de valorisation *mark-to-model*, alors que la valorisation est dite *mark-to-market* lors-

Graphique 14. Comparaison des PnLs simulés historiquement



qu'on utilise des prix de marché. Pour les portefeuilles linéaires, les PnL s simulés pour calculer la valeur en risque correspondent à la différence entre la valeur *mark-to-model* du portefeuille en $t+1$ et la valeur *mark-to-market* du portefeuille en t :

$$PnL_{\text{simulé}} = \underbrace{P(t+1)}_{\text{mark-to-model}} - \underbrace{P(t)}_{\text{mark-to-market}}$$

En $t+1$, le PnL effectivement réalisé est la différence entre deux *mark-to-market* :

$$PnL_{\text{constaté}} = \underbrace{P(t+1)}_{\text{mark-to-market}} - \underbrace{P(t)}_{\text{mark-to-market}}$$

Pour certains produits exotiques, on n'a pas forcément de prix de marché. On peut donc avoir des portefeuilles qui sont valorisés en *mark-to-model* et non en *mark-to-market*. Cela implique que les PnL s simulés pour la VaR sont calculés comme la différence de deux *mark-to-model* :

$$PnL_{\text{simulé}} = \underbrace{P(t+1)}_{\text{mark-to-model}} - \underbrace{P(t)}_{\text{mark-to-model}}$$

tout comme le PnL effectivement réalisé

$$PnL_{\text{constaté}} = \underbrace{P(t+1)}_{\text{mark-to-model}} - \underbrace{P(t)}_{\text{mark-to-model}}$$

Nous voyons donc l'importance du pricing en termes de gestion des risques. Si la valorisation est mauvaise, les *VaRs* produites par le *risk management* et les résultats annoncés par la salle de marché n'ont aucun sens. C'est pourquoi les autorités de supervision (et les commissaires au compte) attachent une très grande importance à la gestion du risque de modèle des produits exotiques.

2.4.4. La gestion du risque de modèle des produits exotiques

Ce paragraphe s'inspire très largement des travaux de Rebonato (2001), Derman (2001) et surtout de Kurtz et Riboulet¹¹. Ces derniers proposent la définition suivante :

« Le risque de modèle est l'ensemble des risques auxquels s'expose une institution financière dont le *risk management* repose sur des modèles mathématiques ».

Le risque de modèle est généralement divisé en trois types :

1. *Le risque opérationnel*

C'est l'ensemble des risques provenant d'erreurs dans le développement des outils de valorisation. Ces erreurs peuvent être des erreurs d'implémentation, des erreurs dans les formules fermées, des erreurs dans l'utilisation de méthodes numériques, etc.

2. *Le risque de paramètre*

Les modèles sont alimentés par des paramètres qui peuvent être plus ou moins difficiles à estimer. Une mauvaise estimation d'un paramètre peut conduire à une mauvaise valorisation (*mispricing*) alors même que le modèle est juste. Parfois, certains paramètres ne peuvent être estimés, et on utilise des valeurs à dire d'expert, ce qui peut conduire aussi à une mauvaise valorisation. L'étude du risque de paramètre consiste donc à souligner l'impact sur le prix (ou les ratios de couverture) d'une variation de chacun des paramètres du modèle.

3. *Le risque de spécification*

Le risque de spécification est le risque auquel s'expose l'utilisateur d'un modèle mal spécifié en ce sens qu'il ne modélise qu'imparfaitement la réalité. Un modèle peut être erroné pour plusieurs raisons : mauvaise spécification des facteurs de risque, dynamique des facteurs de risque improprement spécifiée, relation entre les facteurs de risque incorrectement décrite, etc.

On voit donc l'importance du risque de modèle dans un calcul de valeur en risque pour les produits exotiques. Il faut aussi noter l'existence d'un risque parfois sous-estimé : le risque de gestion. Les marges commerciales sur les produits exotiques correspondent généralement à la différence entre

¹¹D. Kurtz et G. Riboulet, « L'audit des pricers : une étude du risque de modèle », Document interne, Crédit Lyonnais, 2002.

le prix de transaction et le prix *mark-to-model*. Pour figer ces marges commerciales, il convient donc de gérer le produit, c'est-à-dire de mettre en place une couverture. Le risque de gestion est justement le risque d'une mauvaise couverture. Idéalement, le risque de modèle ne doit pas seulement s'intéresser au produit exotique, mais bien à l'ensemble produit et portefeuille de couverture.

Remarque 20. *Les scénarios de stress ont une grande importance dans la gestion des produits exotiques et complètent les gestions en VaR et en sensibilités. Ils sont par exemple utilisés pour mesurer le risque lié à un paramètre de modèle qui n'est pas observable (ou qui ne peut être calibré à partir de données de marché). Ils peuvent aussi servir à définir des limites de trading.*

Remarque 21. *Il y a un débat sur le risque de modèle que certains assimilent à un risque opérationnel. Nous pensons que c'est une erreur, et que le risque de modèle est un risque de marché, car une mauvaise valorisation (par un modèle ou par le marché) est intrinsèquement un risque de marché. Lorsque le choix d'un modèle mathématique n'est pas évident, c'est souvent parce que le produit est difficile à valoriser et donc que le risque commercial est important. C'est pourquoi les marges commerciales sont généralement plus importantes que pour d'autres produits et intègrent implicitement ce risque supplémentaire de valorisation.*

3. Les programmes de stress-testing¹²

Comme le demandent les autorités réglementaires, les établissements financiers **doivent** effectuer régulièrement des simulations de crise (ou scénarios de stress) afin de connaître le montant des pertes **exceptionnelles** en cas de fluctuations dangereuses et importantes du marché. Il faut tout de suite préciser que ces simulations de crises ne sont en aucun cas utilisées pour calculer l'exigence de fonds propres, mais doivent permettre d'identifier les zones du portefeuille les plus sensibles aux crises. Le but de ces simulations est donc de compléter le dispositif de gestion et de mesure du risque de marché¹³.

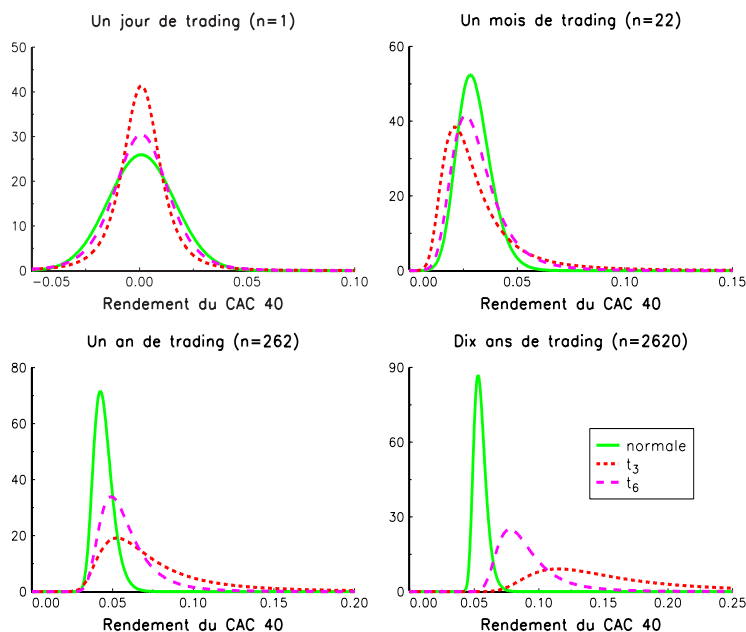
Remarque 22. *L'utilisation de simulations de crise est l'un des quatre principes de base définis par la Commission Bancaire pour qu'un modèle interne soit validé.*

¹²La première partie de cette section s'inspire des travaux réalisés par Arnaud Costinot lors de son stage au Groupe de Recherche Opérationnelle du Crédit Lyonnais. A. Costinot, *La construction d'un programme de simulation de crise*, Rapport de stage, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, 2000.

¹³Une étude menée par Tucker et Lawrence sur le risk management auprès de 679 institutions de 25 pays montre que 93% des risk managers considèrent qu'une mesure VaR est insuffisante comme mesure de risque.

T. Tucker et A. Lawrence, «Chain Reaction», *FOW*, November 1998, p. 25-28.

Graphique 19. Densité du maximum du rendement du CAC 40 pour différents horizons



était peut-être intéressante parce qu'elle se prêtait assez facilement à un calcul analytique par exemple. En finance, les professionnels ont l'habitude de considérer des solutions simples et robustes à des problèmes relativement complexes. Par exemple, cela fait très longtemps que l'on sait que le modèle de Black et Scholes repose sur une hypothèse fautive sur la volatilité : cette volatilité n'a quasiment aucun lien avec la volatilité historique et elle n'est pas constante puisque nous observons les phénomènes de *volatility smile*. Pourtant, pour certains marchés, les traders continuent d'utiliser le modèle BS en jouant sur le paramètre de volatilité. Nous pouvons donc très bien garder notre hypothèse de distribution et jouer sur les paramètres afin que le modèle avec des valeurs corrigées de paramètres fonctionne.

Reprenons l'hypothèse **H1**. Soit la série historique des rendements journaliers $\{r_j, j = 1, \dots, T\}$. Les estimateurs classiques de μ et σ sont $\hat{\mu} = \sum_{j=1}^T r_j / T$ et $\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{j=1}^T (r_j - \hat{\mu})^2} / T$. En fait, ces estimateurs sont ceux du maximum de vraisemblance. À partir de la série historique précédente, nous pouvons créer la série historique $\{r_j, j = 1, \dots, T/n\}$ des maxima $r_{n:n}(t)$. La log-vraisemblance individuelle du j -ième maximum

est égale à :

$$\begin{aligned}
 \ell(r_j; \mu, \sigma) &= \ln f_{n:n}(r_j) \\
 &= \ln n + (n-1) \ln \mathbf{F}(r_j) + \ln f(r_j) \\
 &= \ln n + (n-1) \ln \Phi\left(\frac{r_j - \mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} \ln 2\pi - \ln \sigma - \\
 &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{r_j - \mu}{\sigma}\right)^2
 \end{aligned}$$

Si la distribution est vraiment gaussienne, alors les deux estimations donnent sensiblement les mêmes résultats. De même, nous pourrions considérer toute autre statistique d'ordre. Soit la série historique $\{r_j, j = 1, \dots, T/n\}$ de la i -ième statistique d'ordre $r_{n:n}(t)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \ell(r_j; \mu, \sigma) &= \ln f_{i:n}(r_j) \\
 &= \ln n! - \ln(i-1)! - \ln(n-i)! + \\
 &\quad (i-1) \ln \Phi\left(\frac{r_j - \mu}{\sigma}\right) + (n-i) \ln \Phi\left(\frac{\mu - r_j}{\sigma}\right) - \\
 &\quad \left[\frac{1}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln(\sigma^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{r_j - \mu}{\sigma}\right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

En reprenant les données de l'indice CAC 40, nous estimons les paramètres μ et σ pour différentes valeurs de i (ordre de la statistique) et de n (horizon). Les valeurs sont données dans les tableaux 8 et 9. Pour i et n égal à 1, nous obtenons les estimations classiques du maximum de vraisemblance. Nous remarquons que les valeurs prises par σ sont généralement plus élevées pour les statistiques d'ordre extrême que pour les statistiques d'ordre médian.

Tableau 8. Estimation ML de μ (en pb) à partir des statistiques d'ordre (distribution gaussienne)

n/i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8									
2	21	-11								
3	37	5	-33							
4	60	6	4	-58						
5	78	10	6	0	-80					
6	97	17	5	4	-4	-104				
7	121	26	3	5	3	-5	-132			
8	116	60	11	4	3	2	-18	-145		
9	154	35	13	8	4	2	-4	-25	-166	
10	153	82	19	6	5	4	3	-6	-47	-185

Ce phénomène s'explique par la sous-estimation des extrêmes par la distribution gaussienne. Considérons maintenant une hypothèse proche

Tableau 9. Estimation ML de σ (en pb) à partir des statistiques d'ordre (distribution gaussienne)

n/i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	154									
2	149	161								
3	162	116	180							
4	178	112	115	198						
5	188	125	112	122	212					
6	198	132	110	111	128	228				
7	212	141	112	108	113	131	243			
8	204	182	122	104	108	117	146	248		
9	231	145	121	114	106	111	124	151	260	
10	224	196	131	115	110	108	109	130	175	269

de **H2** : $(r(t) - \mu)/\sigma \sim \mathbf{t}_\nu$. Nous obtenons les résultats des tableaux 10 et 11. Pour la distribution \mathbf{t}_6 , nous obtenons des valeurs relativement stables. Dans le cas de la distribution \mathbf{t}_1 , nous observons le phénomène opposé à celui de la distribution gaussienne : les valeurs prises par σ sont **moins** élevées pour les statistiques d'ordre extrême que pour les statistiques d'ordre médian. La distribution \mathbf{t}_1 a donc tendance à sur-estimer les extrêmes. Le graphique 20 présente la synthèse des estimations de la volatilité annuelle (en prenant 250 jours de trading).

Tableau 10. Estimation ML de σ (en pb) à partir des statistiques d'ordre (distribution \mathbf{t}_6)

n/i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	102									
2	102	105								
3	101	103	106							
4	105	100	103	109						
5	102	102	102	105	108					
6	103	103	100	102	107	111				
7	107	108	100	099	103	109	111			
8	102	111	107	095	099	104	111	111		
9	104	110	106	104	099	102	110	115	109	
10	100	117	112	104	102	100	099	111	111	107

Boudoukh *et al.* (1995) définissent l'analyse « *worst-case scenario* » (ou WCS) de la façon suivante¹⁶ :

¹⁶J. Boudoukh, M. Richardson et R. Whitelaw, « Expect the Worst », *Risk*, 8, September 1995, p. 100-101.

Tableau 11. Estimation ML de σ (en pb) à partir des statistiques d'ordre (distribution \mathbf{t}_1)

n/i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	64									
2	63	65								
3	56	70	60							
4	53	68	70	56						
5	46	63	72	66	52					
6	43	59	70	71	66	48				
7	42	59	66	70	70	62	44			
8	36	54	69	67	71	68	58	40		
9	32	52	65	72	72	70	68	58	36	
10	28	50	63	69	74	71	65	63	49	32

« WCS asks the following question : what is the worst that can happen to the value of the firm's trading portfolio over a given period (eg, 20 trading days) ? »

Comme l'expliquent Bahar *et al.* (1997), l'utilisation de l'analyse WCS est motivée par les préoccupations réelles des risk managers¹⁷ :

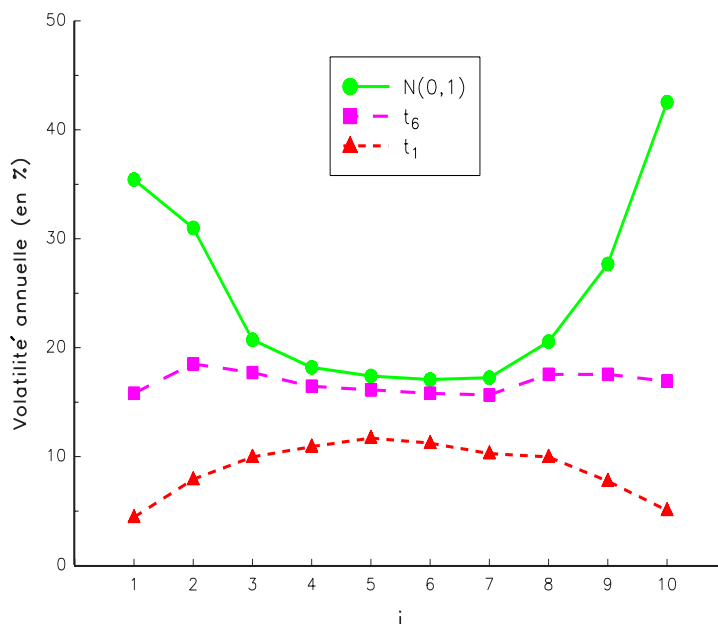
« [...] VaR has been criticised at a more fundamental level – that it asks the wrong question [...] VaR requires a probability that loss shocks, over a short horizon, will not exceed a certain figure. This is often interpreted as expressing the number of times a loss shock in excess of the subjective threshold would occur over a long time horizon. But managers are more likely be concerned with the probability of realising a specific loss shock, rather than the probability of landing in a region of large loss shocks. »

L'analyse WCS consiste à diviser une période de référence T en N sous-intervalles de même longueur. Soit X_n la variable aléatoire décrivant la position nette du portefeuille pour le n -ième sous-intervalle. Dans ce contexte, nous pouvons définir la mesure de risque à partir du nombre de sous-intervalles qui présentent une perte supérieure à une valeur donnée x^- :

$$\frac{\sum_{n=1}^N \mathbf{1}\{X_n \leq x^-\}}{N} = 1 - \alpha$$

avec α le seuil de confiance. Présenté de cette façon, x^- n'est rien d'autre que la mesure *VaR*. En revanche, l'analyse WCS considère **la distribution de la perte maximale** (ou la fonction de distribution du *pire*) parmi les sous-intervalles. Présentée de cette façon, l'analyse WCS est donc un sous-produit de l'analyse des statistiques d'ordre.

¹⁷R. Bahar, M. Gold, T. Kitto et C. Polizu, « Making the Best of the Worst », *Risk*, 10, August 1997, p. 100-103.

Graphique 20. Estimation de $\hat{\sigma}\sqrt{250}$ à partir des statistiques d'ordre $r_{i:10}(t)$ 

3.5.3. La théorie asymptotique

La théorie asymptotique des valeurs extrêmes consiste à étudier le comportement des statistiques d'ordre extrême lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini. Nous verrons que ce comportement est original et que la distribution de ces statistiques d'ordre converge vers une distribution relativement simple. Nous montrerons ensuite comment estimer cette distribution asymptotique et comme l'utiliser pour construire des scénarios de crise.

Le théorème de Fisher-Tippet

Ce théorème permet de caractériser la loi de distribution asymptotique des valeurs extrêmes¹⁸.

Théorème 1. Soient n variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes et de même loi de distribution \mathbf{F} . S'il existe des constantes a_n et b_n et une distribution limite non dégénérée \mathbf{G} telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ \frac{X_{n:n} - b_n}{a_n} \leq x \right\} = \mathbf{G}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

¹⁸P. Embrechts, C. Klüppelberg et T. Mikosch, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, 1997.

avec :

$$\Lambda_c = \frac{E_c^2 \left(p_c (1 - p_c) - (p_c \varpi_c \sigma [X])^2 \right)}{E^{*2} \left(p^* (1 - p^*) - (p^* \varpi^* \sigma [X])^2 \right)}$$

Nous retrouvons l'expression de n^* du Comité de Bâle (§445 du CP2/IRB). Il existe néanmoins une différence fondamentale entre l'analyse de Gordy (2003) et la formulation proposée par le Comité de Bâle concernant Λ_c . Dans le document CP2/IRB, la calibration de n^* ne se fait pas uniquement à partir du risque de défaut idiosyncratique, mais utilise aussi le risque de recouvrement idiosyncratique. Dans ce cas, nous avons :

$$\Lambda_c = \frac{E_c^2 \left(p_c (1 - p_c) - (p_c \varpi_c \sigma [X])^2 \right) + p_c \sigma^2 [\text{LGD}_c]}{E^{*2} \left(p^* (1 - p^*) - (p^* \varpi^* \sigma [X])^2 \right) + p^* \sigma^2 [\text{LGD}^*]}$$

En reprenant les hypothèses du Comité de Bâle, nous avons :

$$(p_i \varpi_i \sigma [X])^2 = \left(\frac{\sigma [X]}{(\psi(X; \alpha) - 1)} F_i \right)^2$$

et :

$$\sigma [\text{LGD}_i] = \frac{1}{2} \sqrt{E_i (1 - E_i)}$$

Puisque $X \sim \Gamma(0,25; 4)$, $\psi(X; 99,5\%)$ et $\sigma[X]$ prennent les valeurs respectives 12,007243 et 2, et nous obtenons :

$$(p_i \varpi_i \sigma [X])^2 = 0,033014360 \times F_i^2$$

L'expression de Λ_c est bien celle du Comité de Bâle :

$$\Lambda_c = \frac{E_c^2 \left(p_c (1 - p_c) - 0,033 \times F_c^2 \right) + 0,25 \times p_c E_c (1 - E_c)}{E^{*2} \left(p^* (1 - p^*) - 0,033 \times F^{*2} \right) + 0,25 \times p^* E^* (1 - E^*)}$$

avec $F_c = P_c - p_c$ et $F^* = \sum_c s_c F_c$.

3.3.4. Bien comprendre la notion de granularité

Nous revenons sur la granularité qui est une notion souvent mal comprise. L'exemple le plus frappant est le nombre de personnes qui pensent à tort que le modèle Bâle II utilise un taux de recouvrement non aléatoire. Considérons tout d'abord un portefeuille composé d'une seule créance. L'expression de la perte étant $L = \text{EAD} \times \text{LGD} \times \mathbf{1}\{\tau < T\}$, la valeur en risque de ce portefeuille (ou de cette créance) au seuil de confiance α est alors :

$$\text{VaR} = \begin{cases} \text{EAD} \times \mathbf{G}^{-1} \left(\frac{\alpha + \text{PD} - 1}{\text{PD}} \right) & \text{si } 1 - \text{PD} \leq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où \mathbf{G} est la fonction de distribution de LGD. Nous notons RC la contribution en risque de la créance dans un portefeuille infiniment granulaire.

Nous fixons l'exposition au défaut égale à 1. Le graphique 5 présente la valeur en risque VaR de la créance pour différentes valeurs de PD et la contribution en risque RC. Nous remarquons tout d'abord que la valeur en risque dépend de la distribution de LGD, et non pas uniquement de son espérance mathématique. Nous observons ensuite que la VaR est inférieure à RC, lorsque PD est très faible ($PD \leq 1 - \alpha$). Cela veut dire que la somme des contributions en risque d'un portefeuille infiniment granulaire n'est pas systématiquement un minorant de la valeur en risque du portefeuille non granulaire équivalent. C'est effectivement un minorant lorsque les effets de diversification jouent pleinement. Pour des petits portefeuilles très bien notés (de type sovereign par exemple), la valeur en risque est parfois plus petite que la somme des RC. On constate enfin que RC est égale à VaR pour le cas limite $\rho = 1$. C'est parfaitement normal, puisque dans ce cas, il n'y a plus d'effet de diversification. À titre d'illustration, nous représentons sur le graphique 6 la distribution de perte d'un portefeuille infiniment granulaire¹⁷. Une corrélation nulle des actifs implique un effet de diversification maximum. Dans ce cas, la distribution de perte est égale à la distribution de perte conditionnelle qui ne dépend plus du facteur X . Nous avons donc :

$$L = EAD \times LGD \times PD$$

La valeur en risque du portefeuille est donc égale au coût du risque. Lorsque ρ est différent de zéro, la perte du portefeuille dépend de la perte conditionnelle et de la distribution du facteur (voir le graphique 6 pour le modèle Bâle II).

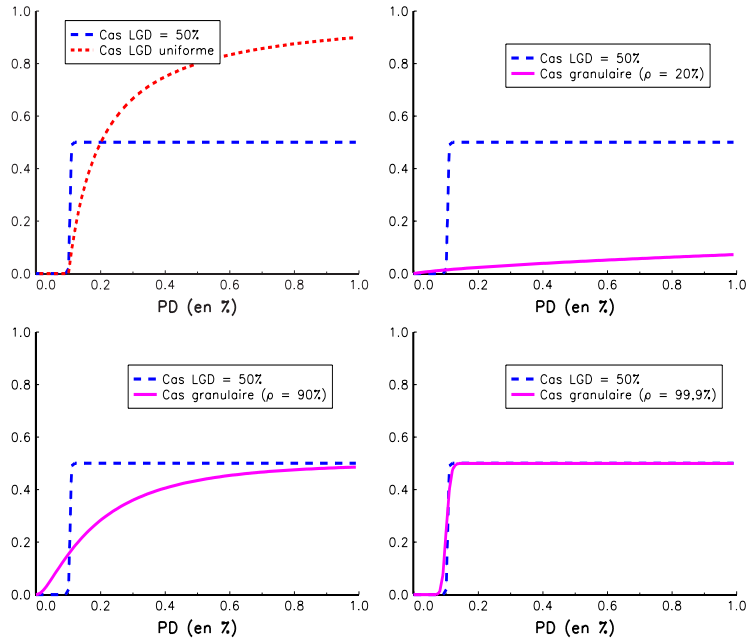
Remarque 38. *Dans le cas d'un modèle Bâle II à plusieurs facteurs, il n'est pas possible d'obtenir une formule fermée pour calculer la valeur en risque d'un portefeuille infiniment granulaire. Nous pouvons alors calculer celle-ci par une méthode de Monte Carlo. La solution la plus directe consiste à simuler les temps de défaut et à calculer ensuite la distribution de perte. Nous pouvons aussi utiliser un Monte Carlo plus rapide et qui converge plus rapidement. Dans ce cas, il suffit de simuler seulement les facteurs et de calculer la distribution de perte en intégrant l'espérance conditionnelle par rapport aux facteurs.*

Le graphique 7 présente les distributions de perte normalisée (par le nombre de créances N) d'un portefeuille homogène¹⁸. Nous remarquons que la distribution dans le cas non granulaire tend vers celle du cas granulaire lorsque la granularité augmente. Dans cet exemple, nous assimilons le degré de granularité au nombre de créances parce qu'elles ont toutes la même exposition. Nous pouvons aussi nous demander comment caractériser la granularité dans le cas général. En fait, il n'y a pas de réponse générale. On ne peut pas considérer qu'un portefeuille est infiniment gra-

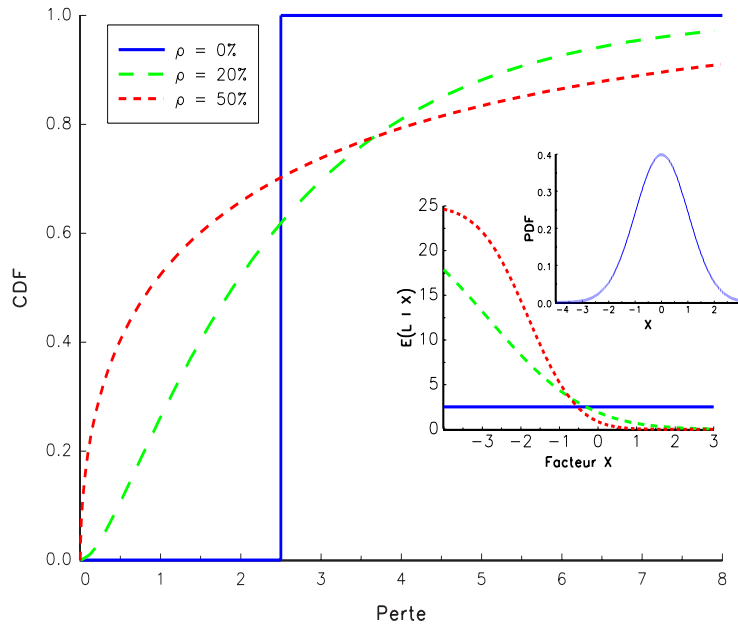
¹⁷C'est un portefeuille homogène composé de 50 créances dont les caractéristiques sont les suivantes : $EAD = 1$, $\mathbb{E}[LGD] = 50\%$ et $PD = 10\%$.

¹⁸Les paramètres sont ceux de la note de bas de page précédente.

Graphique 5. Comparaison entre la valeur en risque d'une créance et la contribution en risque dans un portefeuille granulaire

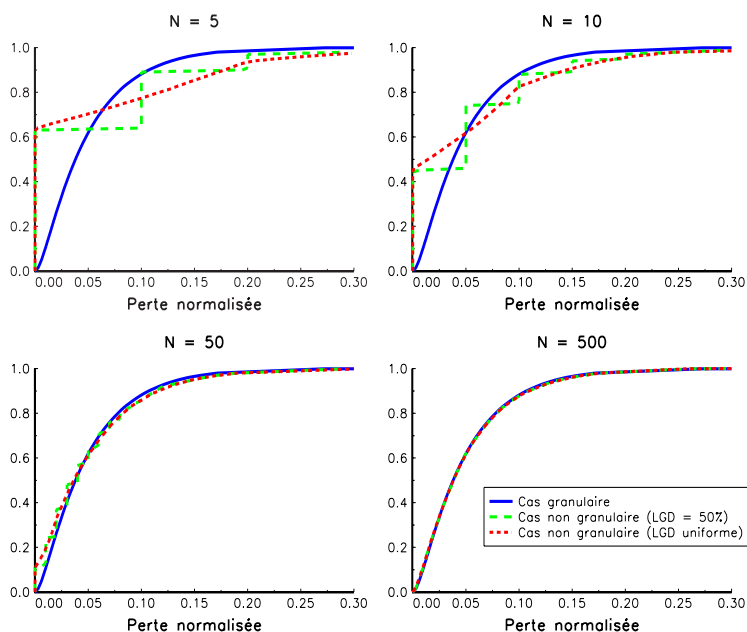


Graphique 6. Distribution de perte d'un portefeuille infiniment granulaire



nulaire lorsque l'exposition maximale est inférieure à x %. Tout dépend des caractéristiques du portefeuille, et la convergence vers le cas granulaire dépend de beaucoup de paramètres. Par exemple, la convergence augmente avec la corrélation de défaut et la probabilité de défaut dans le cas d'un portefeuille homogène. En revanche, cette convergence n'est pas uniforme et diffère selon les niveaux de confiance. À titre d'illustration, nous reportons la différence relative en % entre les contributions en risque non granulaire et granulaire¹⁹ dans la tableau 12.

Graphique 7. Comparaison des distributions de perte normalisée



4. L'approche IRB du Nouvel Accord de Bâle

L'approche IRB de la version définitive du Nouvel Accord présente de nombreuses différences par rapport à celle du deuxième document consultatif. Cette évolution s'est révélée nécessaire afin de trouver un compromis plus large avec l'industrie et surtout afin qu'elle soit beaucoup mieux calibrée.

¹⁹Le cas non granulaire est calculé avec 50 000 simulations.

Tableau 12. Différence relative en % entre les contributions en risque non granulaire et granulaire

	LGD	50%			uniforme		
		$\alpha \backslash N$	50	100	500	50	100
PD = 10%, $\rho = 20\%$	90%	2,7	2,7	0,9	8,5	4,5	1,4
	99%	6,7	1,6	0,1	10	4,3	-0,1
	99,9%	6,5	2,8	0,2	11	3,8	0,2
PD = 10%, $\rho = 10\%$	90%	12	6,8	1,2	14	7,4	1,9
	99%	13	6,2	1,2	20	9,5	1,5
	99,9%	12	6,9	1,0	21	9,6	1,3
PD = 1%, $\rho = 20\%$	90%	60	20	4,0	45	24	5,6
	99%	33	20	1,0	35	19	2,4
	99,9%	9,9	9,9	0,3	25	15	-0,7

4.1. Les enseignements des QIS

Pour calibrer les méthodes de calcul, le Comité de Bâle fait des analyses d'impact quantitatif (*Quantitative Impact Study* ou QIS) avec l'aide de l'industrie bancaire²⁰. Un QIS se présente sous la forme d'un classeur Excel que la banque remplit. Par exemple, on peut demander à la banque de calculer ses actifs pondérés du risque avec la méthode actuelle (celle du ratio Cooke), avec la méthode SA du ratio McDonough et avec la méthode IRB. La réponse aux QIS se fait sur la base du volontariat et les données sont traitées confidentiellement par le Comité de Bâle. De plus, la banque n'est pas obligée de répondre à toutes les questions. Par exemple, une banque peu avancée sur le risque de crédit peut néanmoins répondre aux QIS en remplissant uniquement la partie consacrée à la méthode standard.

Le premier QIS date de l'année 2000. C'est un QIS très partiel qui a aidé le Comité de Bâle à calibrer le deuxième document consultatif ou CP2. En avril 2001, le Comité de Bâle lance QIS 2. Les résultats sont publiés le 5 novembre 2001. 138 banques de 25 pays différents ont répondu à QIS 2. Parmi celles-ci, 127 banques ont fourni des calculs complets pour l'approche SA et 55 d'entre elles ont calculé les actifs pondérés du risque avec l'approche IRB simple. Pour l'approche IRB avancée, seules 22 banques ont mené les calculs de façon complète. Le tableau 13 présente les résultats concernant les variations de charge en capital au titre du risque de crédit par rapport à la méthode Cooke. Le Comité de Bâle distingue deux groupes : le groupe 1 est constitué de grandes banques internatio-

²⁰Basel Committee on Banking Supervision, *Results of the Second Quantitative Impact Study*, November 2001.

Basel Committee on Banking Supervision, *Results of Quantitative Impact Study 2.5*, June 2002.

Basel Committee on Banking Supervision, *Quantitative Impact Study 3 – Overview of Global Results*, May 2003.

3.5. Analyse de scénarios

Le concept d'analyse de scénarios mérite une petite clarification. Lorsque l'on parle de *scenario analysis*, on désire exprimer l'idée selon laquelle les experts d'une banque ou bien les gestionnaires expérimentés ont certaines intuitions ou des informations sur le risque qui ne sont pas contenues dans l'historique de données. On peut prendre en compte ces intuitions en construisant des scénarios. Plus précisément, un scénario consiste en une prévision du montant de perte et de sa probabilité. Par exemple, un expert peut estimer que la banque doit s'attendre à une perte d'un million d'euros ou plus une fois tous les cinq ans. L'enjeu est alors de déterminer la façon dont on peut extraire de ces scénarios une information utile.

C'est assez simple si l'on se rend compte que les scénarios peuvent être traduits en termes de restrictions sur les paramètres de la fréquence et de la sévérité. Une fois ces restrictions définies, on est amené à résoudre un programme de maximisation d'un certain critère sous contraintes. On peut voir le résultat comme un mélange entre une estimation basée sur les données et une estimation provenant de scénarios.

Remarque 43. *Pour déterminer le programme de maximisation, on a besoin d'un résultat théorique. On suppose que le nombre de pertes suit une loi de Poisson de paramètre λ . On note T_i la date à laquelle apparaît la $i^{\text{ème}}$ perte. Cela signifie que les durées $e_i = T_i - T_{i-1}$ entre deux pertes consécutives sont indépendantes et distribuées selon une loi exponentielle de paramètre λ . On suppose que les pertes ζ_i sont i.i.d. de fonction de répartition \mathbf{F} . On note à présent d_j la durée entre deux pertes supérieures à x . Il est évident que les durées sont i.i.d. Il suffit donc de trouver la distribution de probabilité de d_1 . En utilisant le fait qu'une somme finie de temps exponentiels suit une loi de distribution d'Erlang, on a :*

$$\begin{aligned}
\Pr\{d_1 > t\} &= \sum_{i \geq 1} \Pr\{T_i > t; \zeta_1 < x, \dots, \zeta_{i-1} < x; \zeta_i \geq x\} \\
&= \sum_{i \geq 1} \Pr\{T_i > t\} \mathbf{F}(x)^{i-1} (1 - \mathbf{F}(x)) \\
&= \sum_{i \geq 1} (1 - \mathbf{F}(x)) \mathbf{F}(x)^{i-1} \sum_{k=0}^{i-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
&= (1 - \mathbf{F}(x)) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{F}(x)^i \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathbf{F}(x)^k \\
&= e^{-\lambda(1-\mathbf{F}(x))t}
\end{aligned}$$

On en déduit que d_1 suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda(1 - \mathbf{F}(x))$. La durée moyenne entre deux pertes supérieures à x est donc la moyenne de d_1 ou $\frac{1}{\lambda(1-\mathbf{F}(x))}$.

On considère maintenant un scénario défini de la façon suivante :

« une perte supérieure ou égale à x arrive toutes les d années ».

On suppose de plus que la fréquence est une distribution de Poisson (de paramètre λ) et que la sévérité est une distribution lognormale (de paramètres μ et σ). En utilisant le résultat théorique précédent, λ représente le nombre annuel moyen de pertes, $\lambda \times (1 - \mathbf{F}(x; \mu, \sigma))$ est le nombre moyen de pertes supérieures à x et enfin, $\frac{1}{\lambda \times (1 - \mathbf{F}(x; \mu, \sigma))}$ est la durée moyenne entre deux pertes supérieures à x . Il en résulte que, pour un scénario donné (x, d) , les paramètres doivent satisfaire la contrainte suivante :

$$d = \frac{1}{\lambda \times (1 - \mathbf{F}(x; \mu, \sigma))}$$

Il est évident que trois scénarios suffisent pour estimer les trois paramètres λ , μ et σ . On peut alors estimer les paramètres en utilisant un critère quadratique :

$$(\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \arg \min \sum_{j=1}^p w_j \left(d_j - \frac{1}{\lambda \times (1 - \mathbf{F}(x_j; \mu, \sigma))} \right)^2$$

Considérons l'exemple suivant :

x (en millions d'euros)	1	2,5	5	7,5	10	20
d (en années)	$\frac{1}{4}$	1	3	6	10	40

En utilisant une pondération optimale, nous obtenons $\hat{\lambda} = 654$, $\hat{\mu} = 8,60$ et $\hat{\sigma} = 2,08$. On peut comparer directement ces estimations avec celles provenant des données. De plus, on peut calibrer les paramètres en maximisant un critère obtenu comme une combinaison du maximum de vraisemblance et des restrictions précédentes :

$$\max_{(\mu, \sigma)} (1 - \varpi) \ell_n(\mu, \sigma) - \varpi \sum_{j=1}^p w_j \left(d_j - \frac{1}{\lambda \times (1 - \mathbf{F}(x_j; \mu, \sigma))} \right)^2$$

où ϖ est le poids que l'on veut donner aux dires d'experts.

Remarque 44. Nous pouvons montrer que les poids optimaux w_j correspondent à l'inverse de la variance de d_j . Nous avons donc :

$$w_j = \frac{1}{\text{var}(d_j)} = \lambda^2 (1 - \mathbf{F}(x_j; \mu, \sigma))^2$$

Pour résoudre le programme quadratique, nous procédons par itérations.

Notons $(\hat{\lambda}_{\text{iter}}, \hat{\mu}_{\text{iter}}, \hat{\sigma}_{\text{iter}})$ la solution du programme d'optimisation :

$$(\hat{\lambda}_{\text{iter}}, \hat{\mu}_{\text{iter}}, \hat{\sigma}_{\text{iter}}) = \arg \min \sum_{j=1}^p w_j \left(d_j - \frac{1}{\lambda \times (1 - \mathbf{F}(x_j; \mu, \sigma))} \right)^2$$

où $w_j = \left(\hat{\lambda}_{\text{iter}-1} \left(1 - \mathbf{F} \left(x_j; \hat{\mu}_{\text{iter}-1}, \hat{\sigma}_{\text{iter}-1} \right) \right) \right)^2$. Sous certaines conditions, les estimations $(\hat{\lambda}_{\text{iter}}, \hat{\mu}_{\text{iter}}, \hat{\sigma}_{\text{iter}})$ convergent vers la solution. Notons que nous pouvons simplifier le programme d'optimisation en remarquant que $w_j = 1/\text{var}(d_j) = 1/\mathbb{E}^2[d_j] \simeq 1/d_j^2$.

Conclusion

La gestion du risque opérationnel est très récente dans les banques et son développement est fortement lié à la réforme du ratio international de solvabilité. Dans ce chapitre, nous avons principalement abordé le problème de la mesure des fonds propres (Pilier I). Il ne faut cependant pas oublier que le principal enjeu du risque opérationnel est la maîtrise du coût du risque, qui est plus du domaine des unités commerciales.

La valeur en risque permet de calculer l'exigence de fonds propres, qui apparaît dans le bilan de la banque. La perte récurrente ou le coût du risque (qui correspond à l'expected loss) affecte directement les résultats annuels, donc le compte de résultat. Le coût du risque opérationnel est loin d'être négligeable, et peut représenter une proportion significative du PNB pour certaines activités. La gestion du coût du risque cherche à identifier les zones les plus sensibles par le biais du suivi des pertes, mais aussi par le biais des différentes cartographies. Cela permet d'avoir une cotation du risque, pour benchmarker les différentes unités et gérer le risque récurrent (c'est-à-dire le facturer ou le provisionner ou encore le réduire).

Théorème 8. *La distribution de la copule Normale bivariée est :*

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \rho) = \int_0^{u_1} \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho \Phi^{-1}(u)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) du$$

Preuve. Soient $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire gaussien standard dont la corrélation est ρ et X_3 une variable gaussienne indépendante de X_1 et X_2 . Nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2; \rho) &= \Pr \{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} \\ &= \mathbb{E} \left[\Pr \left\{ X_1 \leq x_1, \rho X_1 + \sqrt{1 - \rho^2} X_3 \leq x_2 \mid X_1 \right\} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \Phi \left(\frac{x_2 - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \phi(x) dx \end{aligned}$$

L'expression de la distribution de la copule Normale est donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u_1, u_2; \rho) &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \phi(x) dx \\ &= \int_0^{u_1} \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho \Phi^{-1}(u)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) du \end{aligned}$$

La copule Normale se révèle très maniable pour les calculs (un peu comme la distribution normale multivariée). Par exemple, nous pouvons calculer explicitement le tau de Kendall $\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho$ et le rhô de Spearman $\varrho = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2}$. La distribution conditionnelle $\mathbf{C}_{2|1}(u_1, u_2)$ est :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{2|1}(u_1, u_2) &= \partial_1 \mathbf{C}(u_1, u_2) \\ &= \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser ce résultat pour étendre les résultats classiques de la régression quantile linéaire. Nous notons $x_2 = \mathbf{q}(x_1; \alpha)$ la régression quantile de X_2 sur X_1 : $x_2 = \mathbf{q}(x_1; \alpha) \Leftrightarrow \Pr \{X_2 \leq x_2 \mid X_1 = x_1\} = \alpha$. Soient $U_1 = \mathbf{F}_1(X_1)$ et $U_2 = \mathbf{F}_2(X_2)$. Nous avons

$$\Pr \{X_2 \leq \mathbf{F}_2^{-1}(u_2) \mid X_1 = \mathbf{F}_1^{-1}(u_1)\} = \alpha$$

avec $x_1 = \mathbf{F}_1^{-1}(u_1)$ et $x_2 = \mathbf{F}_2^{-1}(u_2)$. La régression quantile de X_2 sur X_1 revient donc à résoudre le problème suivant $\Pr \{U_2 \leq u_2 \mid U_1 = u_1\} = \alpha$ ou encore $\partial_1 \mathbf{C}(u_1, u_2) = \alpha$. Si nous notons $u_2 = \mathbf{q}^*(u_1; \alpha)$ la solution de cette équation, nous avons $x_2 = \mathbf{F}_2^{-1}(\mathbf{q}^*(\mathbf{F}_1(x_1); \alpha))$ et donc $\mathbf{q}(x; \alpha) = \mathbf{F}_2^{-1}(\mathbf{q}^*(\mathbf{F}_1(x); \alpha))$. La régression quantile (et médiane) est donc un problème statistique de copules.

Dans le cas de la distribution normale bivariée, nous savons que la régression quantile de X_2 sur X_1 est :

$$\begin{aligned} x_2 &= \left[\mu_2 - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \mu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \Phi^{-1}(\alpha) \right] + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1 \\ &= a(\alpha) + bX_1 \end{aligned}$$

La régression est donc **linéaire** (tout comme le problème de la régression **espérance conditionnelle** qui est traditionnellement appelée régression linéaire). Dans le cas de la copule Normale, nous avons :

$$\Pr \{U_2 \leq u_2 \mid U_1 = u_1\} = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right)$$

L'expression de la fonction quantile $u_2 = \mathbf{q}^*(u_1; \alpha)$ est donc $u_2 = \Phi \left(\rho \Phi^{-1}(u_1) + \sqrt{1 - \rho^2} \Phi^{-1}(\alpha) \right)$. Introduisons la transformée Ψ .

Définition 10. Nous définissons l'opérateur Ψ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Psi[\mathbf{F}] &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \Psi[\mathbf{F}](x) = \Phi^{-1}(\mathbf{F}(x)) \end{aligned}$$

Nous notons aussi Ψ^{-1} l'opérateur inverse (gauche) ($\Psi^{-1} \circ \Psi = 1$), i.e. $\Psi^{-1}[\mathbf{F}](x) = \mathbf{F}^{-1}(\Phi(x))$.

Nous avons vu que la régression quantile est linéaire dans le cas gaussien. Dans le cas de la copule Normale, cette régression reste linéaire dans l'espace de projection Ψ . Si nous supposons que seule la copule est Normale (sans faire d'hypothèses sur les marginales), nous pouvons utiliser l'algorithme de Portnoy-Koenker¹⁰ avec les variables aléatoires $Y_i = \Psi[\mathbf{F}_i](X_i)$. Soient \hat{a} et \hat{b} les estimateurs de la régression linéaire :

$$\begin{cases} Y_2 = a + bY_1 + U \\ \Pr \{Y_2 \leq y_2 \mid Y_1 = y_1\} = \alpha \end{cases}$$

La régression quantile de X_2 sur X_1 est alors

$$X_2 = \Psi^{-1}[\mathbf{F}_2] \left(\hat{a} + \hat{b} \Psi[\mathbf{F}_1](X_1) \right)$$

Concernant la dépendance de queue, nous avons :

$$\lambda_U = \lambda_L = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < 1 \\ 1 & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

La copule Normale ne permet donc pas de *corrélér* les valeurs extrêmes (voir le graphique 23).

¹⁰S. Portnoy et R. Koenker, « The Gaussian Hare and the Laplacean Tortoise : Computability of ℓ_1 vs ℓ_2 regression estimators », *Statistical Science*, 12, 1997, p. 279-300.

2. simuler une variable aléatoire x de distribution $\Gamma(1, \theta)$;
3. poser $u_1 = (1 + x_1/x)^{-\theta}$ et $u_2 = (1 + x_2/x)^{-\theta}$.

Il existe plusieurs algorithmes pour simuler les copules Archimédiennes. Genest et MacKay (1986) proposent celui-ci :

1. simuler deux variables aléatoires uniformes v_1 et v_2 ;
2. prendre $u_1 = v_1$;
3. prendre $u_2 = \varphi^{-1} \left(\varphi \left(\varphi'^{-1} \left(\varphi' \left(\frac{v_1}{v_2} \right) \right) \right) - \varphi(v_1) \right)$.

Remarque 59. On peut montrer que cet algorithme est celui des distributions conditionnelles.

6.4. La méthode des quantiles empiriques

Le problème de cette section n'est plus la simulation du vecteur \mathbf{U} dont la distribution est une copule \mathbf{C} , mais concerne la simulation du vecteur \mathbf{X} dont la copule est \mathbf{C} et les marges non nécessairement uniformes. Dans les paragraphes précédents, \mathbf{X} était simulé à partir de la transformation suivante :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^{-1}(U_1) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n^{-1}(U_n) \end{pmatrix}$$

Cela implique de connaître les distributions analytiques $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$. Cela n'est pas toujours le cas (par exemple les distributions composées des pertes dans le risque opérationnel). Néanmoins, s'il est possible de simuler les marges $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$, alors nous pouvons simuler la distribution multidimensionnelle \mathbf{F} grâce à la méthode des quantiles empiriques. Soit $\mathbb{F}_{i,m}$ le processus de distribution empirique (non normalisé). Nous avons le résultat suivant :

$$\sup_x |\mathbb{F}_{i,m}(x) - \mathbf{F}_i(x)| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \text{ lorsque } m \rightarrow 0$$

Soient \mathbb{U}_m et \mathbb{F}_m les processus de distribution empirique correspondant aux distributions $\mathbf{C}(u_1, \dots, u_n)$ et $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n)$. En utilisant un argument de type Glivenko-Cantelli, nous avons :

$$\sup_{u_1, \dots, u_n} |\mathbb{U}_p(\mathbb{F}_{1,m}^{-1}(u_1), \dots, \mathbb{F}_{n,m}^{-1}(u_n)) - \mathbf{C}(\mathbf{F}_1^{-1}(u_1), \dots, \mathbf{F}_n^{-1}(u_n))| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$$

lorsque $m \wedge p \rightarrow 0$. À titre d'illustration, le graphique 40 montre la convergence de la méthode des quantiles empiriques vers la méthode des distributions. X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires gaussiennes (copule Normale de paramètre 0,5). m est le nombre de simulations pour construire les fonctions $\mathbb{F}_1(x_1)$ et $\mathbb{F}_2(x_2)$. Le graphique 42 présente 1 024 simulations d'une distribution bivariée dont les marges sont $\mathcal{N}(0, 1) + \Gamma(1, 2)$ et $\mathcal{N}(0, 1) \times \Gamma(1, 2)$ et la copule est Normale de paramètre 0,5.

Chapitre 5

ASPECTS MULTIDIMENSIONNELS DU RISQUE

Ce chapitre est un prologement direct du chapitre précédent. Il porte sur l'application des fonctions copules à la gestion des risques multiples. Nous poursuivons deux objectifs dans ce chapitre. Le premier est de construire des modèles multidimensionnels en corrélant les facteurs de risque à l'aide des copules. Le second objectif est de comprendre comment les mesures de risque sont affectées par la dépendance.

Dans une première section, nous nous intéressons au problème de l'agrégation des risques de marché. Nous introduisons alors la notion fondamentale de diversification en risque. La deuxième section est consacrée à la construction et à l'évaluation des scénarios de crise multidimensionnels. Ensuite, nous abordons le problème du risque de spécification de la dépendance entre les facteurs de risque. La quatrième section porte sur le risque opérationnel et présente différentes méthodes pour estimer la charge en capital d'une banque. Enfin, la dernière section est consacrée à la modélisation du risque de crédit.

1. Agrégation des risques de marché

Revenons sur la problématique générale de la mesure des risques dans le cas multidimensionnel. L'approche copule permet de la considérer sous trois angles :

1. La première « source de risque » concerne les facteurs pris de façon individuelle. Il est évident que le choix de la modélisation de la

distribution d'un facteur peut avoir une influence **importante** sur la mesure de risque. De plus, même si deux distributions ont été calibrées pour donner la même mesure pour un seuil de confiance donné, le passage à un seuil de confiance plus élevé peut entraîner des différences importantes. Ceci est lié au comportement (asymptotique et non asymptotique) des valeurs extrêmes. Par exemple, le tableau 1 illustre les différences induites par des distributions Φ , \mathbf{t}_4 et \mathbf{t}_2 . Nous reportons en particulier le facteur d'échelle $c(\alpha; \nu)$ entre les quantiles de la distribution gaussienne et de la distribution \mathbf{t}_ν de Student, que nous définissons par $c(\alpha; \nu) = \frac{\Phi^{-1}(0,99)}{\mathbf{t}_\nu^{-1}(0,99)} \mathbf{t}_\nu^{-1}(\alpha)$.

Tableau 1. Influence de la distribution sur la mesure de risque

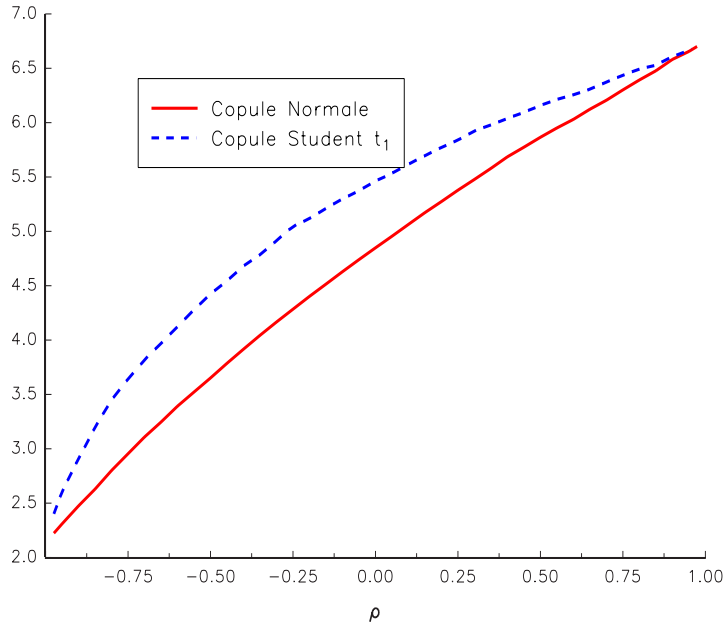
Rating		BBB	A	AA	AAA
α	99%	99,75%	99,9%	99,95%	99,97%
\check{t}	100 jours	400 jours	4 années	8 années	13 années
$\Phi^{-1}(\alpha)$	2,33	2,81	3,09	3,29	3,43
$\mathbf{t}_4^{-1}(\alpha)$	3,75	5,60	7,17	8,61	9,83
$c(\alpha; 4)$	2,33	3,48	4,45	5,35	6,10
$\mathbf{t}_2^{-1}(\alpha)$	6,96	14,1	22,3	31,6	40,8
$c(\alpha; 2)$	2,33	4,71	7,46	10,6	13,6

2. La deuxième source de risque porte sur la dépendance des facteurs, c'est-à-dire comment sont corrélés les risques unidimensionnels. Il est difficile d'analyser le risque multidimensionnel lorsque nous n'utilisons pas une approche copule, car il n'est pas évident de voir quelle est la part des marginales et la part de la copule. Reprenons l'exemple 17. Nous avons $L_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $L_2 \sim \mathbf{t}_3$. Nous cherchons à calculer la mesure agrégée $\text{VaR}(L_1 + L_2; \alpha)$. Le graphique 1 représente $\text{VaR}(L_1 + L_2; \alpha)$ en fonction du paramètre ρ des copules Normale et Student ($\nu = 1$). Nous constatons que la mesure est plus grande pour cette dernière copule. Remarquez que la source de risque due à la copule peut encore être décomposée en deux :

- (a) La famille de copule est un choix important à faire. Nous rappelons que le problème de l'agrégation de la mesure de risque est un problème d'agrégation de quantiles extrêmement élevés ($\alpha > 99\%$). Une copule qui présente une dépendance de queue ne corrèle pas ces quantiles de la même façon qu'une copule qui n'a pas de dépendance de queue.
- (b) La valeur du paramètre (qui peut être multidimensionnel) de la copule est aussi un autre choix important à faire. En général, ce choix est guidé par une méthode de calibration.

3. La troisième source de risque concerne directement la composition du portefeuille. Il est difficile de dire que tel choix de modélisation

Graphique 1. Comparaison de la mesure $\text{VaR}(L_1 + L_2; 99\%)$ (copules Normale et t_1)



conduit à une mesure de risque élevée ou faible sans considérer la nature du portefeuille.

Dans les paragraphes qui suivent, nous étudions comment la dépendance influence la mesure de risque.

1.1. L'effet de diversification

Considérons deux variables aléatoires L_1 et L_2 représentant les pertes de deux marchés. Soient \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 les distributions de L_1 et L_2 et \mathbf{C} la copule entre L_1 et L_2 . Les valeurs en risque au seuil de confiance α sont alors $\text{VaR}(L_1; \alpha) = \mathbf{F}_1^{-1}(\alpha)$ et $\text{VaR}(L_2; \alpha) = \mathbf{F}_2^{-1}(\alpha)$. Nous cherchons à agréger ces deux valeurs en risque, c'est-à-dire à déterminer la VaR de $L_1 + L_2$: $\text{VaR}(L_1 + L_2; \alpha) := \inf \{x : \Pr \{L_1 + L_2 \leq x\} \geq \alpha\}$. Soit \mathbf{F}_{1+2} la distribution de $L_1 + L_2$. Nous avons :

$$\mathbf{F}_{1+2}(x) = \iint_{x_1+x_2 \leq x} d\mathbf{F}_{1+2}(x_1, x_2) = \iint_{x_1+x_2 \leq x} d\mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2))$$

La valeur en risque $\text{VaR}(L_1 + L_2; \alpha)$ dépend donc des distributions marginales, ainsi que de la copule \mathbf{C} entre L_1 et L_2 .

Nous considérons le cas $\mathbf{C} = \mathbf{C}^+$. Nous supposons que \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 sont continues. D'après la définition de la comonotonie, nous avons $L_2 =$

crédit afin de bien comprendre les différents produits. La première section concerne les créances bancaires qui représentent la principale source du risque de crédit. Les obligations risquées sont étudiées dans la deuxième section, enfin nous présenterons les dérivés de crédit et la titrisation synthétique dans la troisième section.

1. Le marché des créances bancaires

Dans cette section, nous faisons un bref rappel du marché traditionnel du crédit. Nous distinguons généralement les créances bancaires selon deux axes d'analyse (contrepartie et produit). L'axe contrepartie s'intéresse à la nature du client (entreprise, banque, petite clientèle, etc.). Les groupes bancaires ont adopté cette approche client (banque de détail/banque de financement et d'investissement ou *corporate and investment banking*). Pour la banque de détail, les principales créances sont les prêts immobiliers, les crédits personnels, les crédits permanents (ou revolving) et les découverts en compte. En termes d'encours en capitaux, les prêts immobiliers représentent la plus grande partie. Les crédits personnels correspondent aux crédits automobile et aux crédits à la consommation. Dans la banque de détail, la problématique du crédit concerne surtout l'octroi et assez peu la tarification qui est généralement unique pour des caractéristiques données quel que soit le client. La question pour la banque est de savoir si elle accorde le crédit à son client, et non à quel taux elle est prête à accorder le crédit à son client. La banque cherche donc à identifier les potentiels bons payeurs des potentiels mauvais payeurs. Pour cela, elle s'appuie sur les techniques dites de *credit scoring*¹. En fonction des caractéristiques du client et du crédit, on calcule un score (généralement sur 1000). La banque acceptera d'accorder le crédit si ce score est suffisamment élevé (au dessus d'un score plancher). La problématique pour la banque d'investissement est différente. Celle-ci cherche à déterminer le taux minimum à partir duquel l'opération est dite rentable. Elle s'appuie alors sur les techniques de *Raroc*. Cette distinction *scoring/Raroc* se retrouve dans la classification des clients : dans la banque de détail, on parle de segmentation de clientèle, alors que dans la banque d'investissement on parle de notation des clients (en fonction des classes de risque). De plus, la gamme des produits est beaucoup plus large dans la banque d'investissement. Les grands types de créances sont les lignes de crédit, les prêts, le crédit-bail et les cautions. Une ouverture de ligne de crédit peut être confirmée ou non (dans ce cas, le client doit faire une demande pour tirer sur sa ligne de crédit), court terme ou moyen terme. Le crédit court terme permet de financer généralement les besoins spécifiques de trésorerie. On y range les facilités de caisse ou découverts autorisés, les crédits de trésorerie

¹P. Georges et E. Marot, « Techniques de scoring et applications bancaires », Notes de cours, ENSAI, 2002.

et l'escompte. Les lignes de crédit moyen terme sont peu répandues. En effet, les entreprises utilisent plutôt des prêts (ou crédits échéancés) pour financer des immobilisations (mobilier, matériel, etc.). Ces prêts peuvent être à taux fixe ou à taux variable (qui dépend soit d'un taux de référence comme l'Euribor soit d'un indice comme l'Eonia). Le crédit-bail est une formule de leasing : la banque achète le bien et reçoit des loyers de la part de l'emprunteur qui peut racheter le bien pour une valeur résiduelle au terme du contrat. Les cautions sont des engagements de la banque de se substituer au client si celui-ci ne respecte pas ses obligations financières ou autres. Ce sont par exemple des cautions bancaires pour garantir la finalisation de travaux (en cas de défaillance de l'entreprise) ou le paiement de pénalités en cas de non-respect du contrat. Enfin, nous devons aussi mentionner les financements sur l'étranger, comme les avances sur devises, les lignes de change ou les crédits documentaires. Dans le cas d'un crédit documentaire ou crédoc, la banque s'engage à payer le montant de la marchandise au fournisseur contre la remise de documents qui prouvent que la marchandise a bien été expédiée.

2. Le marché des obligations risquées

Contrairement aux créances bancaires, les obligations sont des produits qui s'échangent directement sur un marché financier. En gestion de portefeuille, l'investissement en obligations risquées est souvent appelé *investissement en cash*, afin de différencier cet investissement de celui en dérivés de crédit. Les obligations constituent un élément important dans la gestion du risque de crédit. Au même titre que les actions, les obligations possèdent des prix de marché et peuvent être échangées librement entre les différents acteurs du marché. De fait, le risque majeur est un risque de variation (négative) de la valeur de l'obligation imputable à une dégradation de la qualité de l'émetteur (*downgrading risk* ou *default risk*). Toutefois, s'il est vrai que le **risque de crédit** se traduit par un risque de marché (variation du *Mark-to-Market*), il ne s'agit pas pour autant d'un risque de marché pur, c'est-à-dire d'un risque de volatilité. Par ailleurs, il est important de noter que le marché des obligations risquées n'est pas très liquide. Il concerne essentiellement le grand corporate et les marchés émergents. Actuellement, pour de nombreuses contreparties, l'investissement en risque de crédit n'est pas possible autrement que par le biais de credit default swaps. Le **risque de liquidité** (c'est-à-dire la possibilité de retourner sa position dans de relativement bonnes conditions) est donc un deuxième risque à prendre en compte pour valoriser une obligation. Enfin, il existe une composante **risque de taux** dans le prix d'une obligation qui ne doit pas être oubliée.

Avant de présenter la méthode de pricing des obligations risquées, nous donnons quelques éléments sur l'évolution de ce marché.

est exactement égal au nombre de secteurs. Comme nous l'avons vu dans la remarque précédente, il peut parfois être intéressant de reparamétriser les facteurs afin que ces derniers soient plus faciles à interpréter. Nous remarquons par exemple que le modèle à $J + 1$ facteurs défini par :

$$Z_i = \sqrt{\rho}X + \sqrt{\rho_{m(i)} - \rho}X_{m(i)} + \sqrt{1 - \rho_{m(i)}}\varepsilon_i$$

correspond au modèle de copule Normale à J secteurs avec une corrélation inter-sectorielle unique ρ .

Remarque 98. *Si la corrélation inter-sectorielle est unique, nous pouvons utiliser la décomposition précédente pour simuler les temps de défaut. Nous notons cet algorithme [CISC] (pour Constant Inter-Sector Correlation). L'algorithme [CISC] nécessite de simuler un nombre aléatoire supplémentaire par rapport à l'algorithme [Sloane]. Nous rappelons que, pour ce dernier algorithme, le nombre d'opérations élémentaires $+$ et \times est $I \times (J + 1)$ pour un portefeuille de I créances et pour J secteurs. Pour l'algorithme [CISC], le nombre d'opérations élémentaires devient $3 \times I$. Il est évident que ce dernier algorithme est d'autant plus efficace par rapport à l'algorithme [Sloane] que le nombre de secteurs est important.*

Soient τ_1 et τ_2 deux temps de défaut dont la fonction de survie jointe est $\mathbf{S}(t_1, t_2) = \check{\mathbf{C}}(\mathbf{S}_1(t_1), \mathbf{S}_2(t_2))$. Nous avons :

$$\mathbf{S}_1(t \mid \tau_2 = t^*) = \partial_2 \check{\mathbf{C}}(\mathbf{S}_1(t), \mathbf{S}_2(t^*))$$

Si $\mathbf{C} \neq \mathbf{C}^\perp$, la probabilité de défaut d'une firme change lorsque l'autre firme fait défaut (Schmidt et Ward, 2002). Cela implique qu'au moment du défaut de la seconde firme, le spread de crédit de la première firme saute brutalement. On appelle ce phénomène *spread jump*. Il est parfois difficile d'expliquer les mouvements de sauts de spread en termes de copules. L'interprétation en termes de modèle factoriel est beaucoup plus facile.

Les graphiques 21 à 25 montrent les sauts de la fonction de hasard de la matrice de transition annuelle de S&P. Soient K l'état correspondant au défaut et i le rating initial de la firme. Nous avons $\mathbf{S}_i(t) = 1 - \mathbf{e}_i^\top \exp(t\Lambda) \mathbf{e}_K$ avec Λ le générateur de la matrice de Markov. La fonction de hasard est :

$$\lambda_i(t) = \frac{f_i(t)}{\mathbf{S}_i(t)} = \frac{\mathbf{e}_i^\top \Lambda \exp(t\Lambda) \mathbf{e}_K}{1 - \mathbf{e}_i^\top \exp(t\Lambda) \mathbf{e}_K}$$

Avec une copule Normale de corrélation canonique ρ , nous avons :

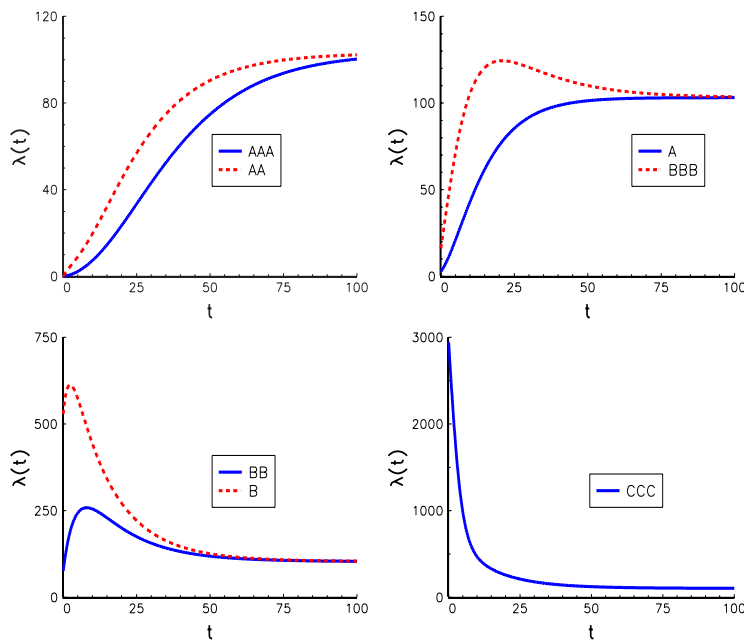
$$\mathbf{S}_{i_1}(t \mid \tau_{i_2} = t^*) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(1 - \text{PD}_{i_1}(t)) - \rho \Phi^{-1}(1 - \text{PD}_{i_2}(t^*))}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right)$$

et :

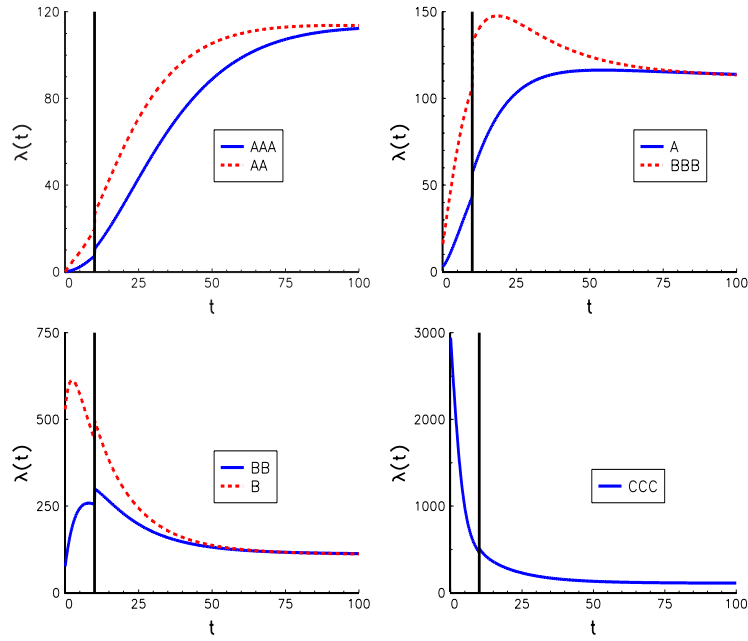
$$f_{i_1}(t | \tau_{i_2} = t^*) = \phi \left(\frac{\Phi^{-1}(1 - PD_{i_1}(t)) - \rho \Phi^{-1}(1 - PD_{i_2}(t^*))}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \times \frac{\mathbf{e}_{i_1}^\top \Lambda \exp(t\Lambda) \mathbf{e}_K}{\sqrt{1 - \rho^2} \phi(\Phi^{-1}(1 - PD_{i_1}(t)))}$$

où $PD_i(t) = \mathbf{e}_i^\top \exp(t\Lambda) \mathbf{e}_K$. Nous en déduisons alors la fonction de hasard $\lambda_{i_1}(t | \tau_{i_2} = t^*)$ après défaut. La référence au modèle factoriel implicite du modèle copule permet d'interpréter plus facilement ces sauts de la fonction de hasard. Par exemple, il est normal que le défaut dans 10 ans d'une firme CCC implique un saut négatif dans la fonction de hasard des firmes bien notées. En effet, cela veut dire que le risque idiosyncratique de la firme CCC a été contrebalancé par une bonne conjoncture économique (le facteur commun X). Si le défaut de la firme CCC était intervenu très tôt, les sauts seraient quasiment nuls, car on peut penser que le défaut est dû au risque spécifique de la firme. Si une firme notée AAA fait défaut, le saut sera d'autant plus important que le défaut est soudain (et donc plus attribuable au facteur commun qu'au facteur spécifique). Il n'y a donc pas de relation monotone a priori entre les sauts de spread et la corrélation.

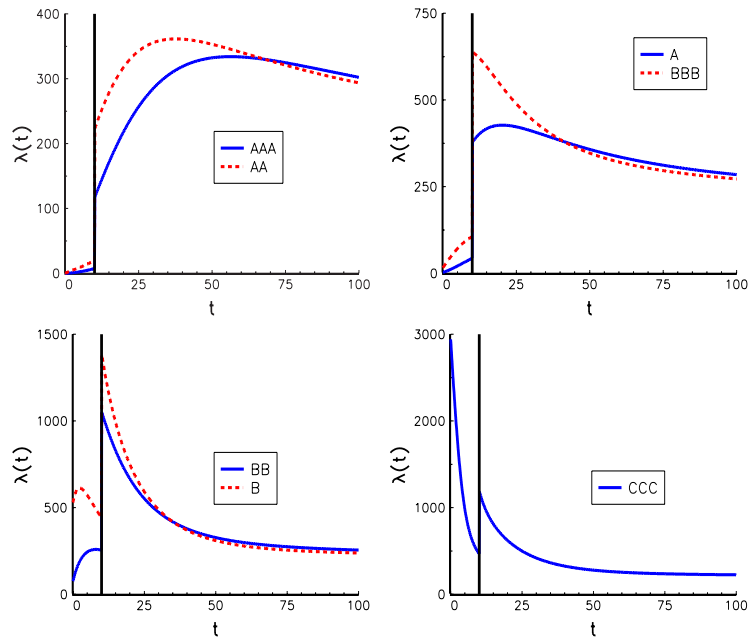
Graphique 21. Taux de hasard (en pb) des ratings



Graphique 22. Taux de hasard (en pb) des ratings lorsqu'une firme notée AAA fait défaut au bout de 10 ans ($\rho = 5\%$)



Graphique 23. Taux de hasard (en pb) des ratings lorsqu'une firme notée AAA fait défaut au bout de 10 ans ($\rho = 50\%$)



- la corrélation médiane par pays est égale à 7,29% en France, 10,19% en Irlande, 8,76% au Japon, 5,22% au Portugal, 9,06% en Espagne, 8,78% aux Etats-Unis, etc ;
- la corrélation médiane par industrie est égale à 8,48% pour l'automobile, 9,88% pour la chimie, 10,85% pour les compagnies financières, 7,08% pour le textile, etc.

3.4.3. Économétrie des corrélations de défaut

Dans le cas d'un modèle factoriel, nous avons :

$$Z_i^\bullet(t) = \beta^\top X_i^\bullet(t) + \sqrt{1 - \|\beta\|} \varepsilon_i(t)$$

où $Z_i^\bullet(t)$ est la valeur (centrée et réduite) de l'actif de la i -ième contrepartie à l'instant t et $X_i^\bullet(t)$ est le vecteur des valeurs (centrées et réduites) des facteurs à l'instant t pour la contrepartie i . Nous pouvons donc estimer les sensibilités β par une méthode économétrique de type OLS ou GMM. Il suffit ensuite d'établir la correspondance entre ces sensibilités et les corrélations qui nous intéressent.

Exemple 31. Reprenons le modèle avec une corrélation inter-sectorielle unique. Nous avons :

$$Z_i = \sqrt{\rho} X + \sqrt{\rho_{m(i)} - \rho} X_{m(i)} + \sqrt{1 - \rho_{m(i)}} \varepsilon_i$$

La régression correspondante est :

$$Z_i^\bullet(t) = \beta_0 X_0^\bullet(t) + \beta^\top X_i^\bullet(t) + \sqrt{1 - \rho_{m(i)}} \varepsilon_i(t)$$

avec $X_i^\bullet(t)$ un vecteur égal à $e_i \odot X^\bullet(t)$, $X^\bullet(t)$ le vecteur des facteurs sectoriels spécifiques à l'instant t et $X_0^\bullet(t)$ le facteur commun. Nous en déduisons que les estimations de ρ et ρ_1, \dots, ρ_j sont données par les relations suivantes : $\hat{\rho} = \hat{\beta}_0^2$ et $\hat{\rho}_j = \hat{\beta}_0^2 + \hat{\beta}_j^2$. Remarquons aussi que les corrélations sectorielles correspondent au carré des R^2 sectoriels de la régression.

Pour estimer les corrélations des instants de défaut, nous pouvons considérer la corrélation des taux de défaut de cohortes homogènes (c'est-à-dire que chaque cohorte correspond à une classe de risque). Cette corrélation converge vers la corrélation des instants de défaut asymptotiquement. Il suffit ensuite d'inverser la relation entre la corrélation des instants de défaut et la corrélation canonique de la copule pour estimer cette dernière.

Nous mentionnons une troisième méthode d'estimation¹³. On se place dans un modèle factoriel et on suppose que la valeur de l'actif de la firme i

A. Das et S. Ishii, « Methods for Calculating Asset Correlations : A Technical Note », Working paper, KMV, 2001.

¹³M. Gordy et E. Heitfield, « Estimating Default Correlations from Short Panels of Credit Rating Performance Data », Working paper, janvier 2002.

P. Demey, J.-F. Jouanin, C. Roget et T. Roncalli, « Maximum Likelihood Estimation of Default Correlations », Working paper, Crédit Agricole S.A., décembre 2003.

est égale à $Z_i = \sqrt{\rho}X + \sqrt{1 - \rho}\varepsilon_i$. X est le facteur commun de distribution \mathbf{H} et ε_i est le risque idiosyncratique gaussien de la firme i de distribution $\mathcal{N}(0, 1)$. On suppose que le défaut intervient lorsque la valeur de l'actif i passe en dessous d'une barrière B_i . La probabilité de défaut conditionnelle à $X = x$ est alors $P_i(x; B_i, \rho) = \Phi((B_i - \sqrt{\rho}x)/\sqrt{1 - \rho})$. Notons d_t le nombre de firmes ayant fait défaut en t et n_t le nombre total de firmes en t . Si nous disposons d'un historique de T taux de défaut, nous pouvons estimer la corrélation de défaut par la méthode du maximum de vraisemblance. Nous notons $\ell_t(\theta)$ la log-vraisemblance de la t -ième observation. Nous supposons pour l'instant une seule classe de risque \mathcal{C} , c'est-à-dire que $B_i = B$ ou encore $P(x; B, \rho) = \Phi((B - \sqrt{\rho}x)/\sqrt{1 - \rho})$. Conditionnellement au facteur $X = x$, le nombre de défaut D est une variable aléatoire binomiale avec :

$$\Pr\{D = d_t \mid X = x\} = \binom{n_t}{d_t} P(x; B, \rho)^{d_t} (1 - P(x; B, \rho))^{n_t - d_t}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \ell_t(\theta) &= \ln \int \Pr\{D = d_t \mid X = x\} d\mathbf{H}(x) \\ &= \ln \int \binom{n_t}{d_t} P(x; B, \rho)^{d_t} (1 - P(x; B, \rho))^{n_t - d_t} d\mathbf{H}(x) \end{aligned}$$

Généralement, l'horizon pour mesurer les taux de défaut est annuel. Dans ce cas, si le facteur commun X est gaussien, nous en déduisons que $B = \Phi^{-1}(\text{PD})$ avec PD la probabilité de défaillance d'horizon 1 an de la classe de risque \mathcal{C} . Nous en déduisons que la log-vraisemblance de l'observation t s'écrit :

$$\ell_t(\theta) = \ln \int \binom{n_t}{d_t} P(x; \Phi^{-1}(\text{PD}), \rho)^{d_t} (1 - P(x; \Phi^{-1}(\text{PD}), \rho))^{n_t - d_t} d\Phi(x)$$

Le seul paramètre à estimer est ρ . Si les taux de défaut ne correspondent pas à une seule classe de risque, nous pouvons supposer que :

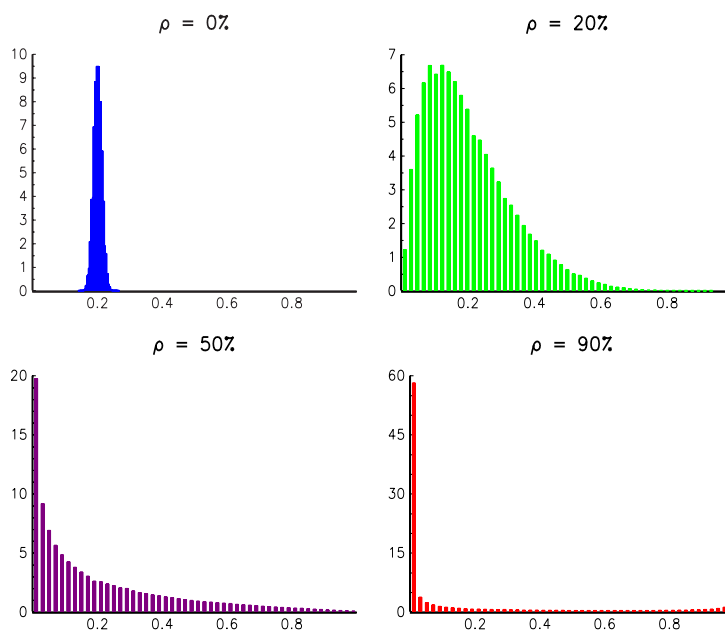
$$\ell_t(\theta) = \ln \int \binom{n_t}{d_t} P(x; B, \rho)^{d_t} (1 - P(x; B, \rho))^{n_t - d_t} d\Phi(x)$$

Dans ce cas, les paramètres à estimer sont ρ et une barrière implicite B .

Remarque 99. *L'idée sous-jacente à cette méthode d'estimation est que la corrélation des défauts se traduit dans la volatilité du taux de défaut¹⁴ (ou dans la distribution du taux de défaut). Considérons par exemple le taux de défaut d'une classe de risque de probabilité de défaillance annuelle de 20%. Nous représentons les fréquences du taux de défaut (pour un nombre de firmes égal à 1 000) sur le graphique 26 pour différentes valeurs du paramètre ρ .*

¹⁴Alors que la probabilité de défaillance se traduit dans la moyenne.

Graphique 26. Fréquence (en %) du taux de défaut



Exemple 32. Les nombres de défauts d'une classe de risque dont la probabilité de défaillance annuelle est égale à 200 pb sont respectivement pour les vingt dernières années 3, 1, 14, 0, 33, 3, 53, 1, 4, 0, 1, 8, 7, 3, 5, 5, 0, 49, 0 et 7. On suppose que le nombre de firmes est égal à 500 quelle que soit l'année. Si nous estimons la vraisemblance en considérant un facteur gaussien et $B = \Phi^{-1}(\text{PD})$, nous obtenons $\hat{\rho} = 28,86\%$. Si nous estimons aussi la barrière, nous avons $\hat{\rho} = 28,49\%$ et $\hat{B} = -2,066$ (ce qui implique une probabilité de défaillance implicite de 194 pb). Il est généralement préférable d'estimer la barrière si on n'a pas confiance dans la valeur de la probabilité de défaillance de la classe, car l'estimation de la corrélation risque d'être biaisée. Par exemple, avec une probabilité de 100 pb, nous obtenons $\hat{\rho} = 23,57\%$, ce qui est plus faible que l'estimation précédente.

Conclusion

La modélisation du risque de crédit repose sur quatre briques essentielles : l'exposition au défaut, la perte en cas de défaut, la probabilité de défaut et la corrélation de défaut. Les choix de modélisation influencent la mesure de risque qui permet de dimensionner les fonds propres. Ils sont néanmoins indissociables des systèmes d'information et des données disponibles. Cela est particulièrement le cas de l'exposition au défaut que de nombreuses banques appréhendent actuellement de façon très simplifiée.

le client B s'avère être bien plus rentable que celle avec le client A. En revanche, l'approche Raroc estime statistiquement le risque récurrent en fonction des caractéristiques de la contrepartie et permet d'ores et déjà de voir que la marge demandée au client B n'est pas en adéquation avec les coûts inhérents à l'opération. Par ailleurs, l'analyse économique du risque présente une consommation de fonds propres sept fois plus importante pour le client B. En conclusion, le Raroc met en exergue la rentabilité du client A et le danger d'une opération avec le client B.

Le Raroc n'est qu'un outil d'aide à la décision et à la gestion. Il est excessivement dépendant des données fournies en entrée et des différents phénomènes modélisés. Il ne saurait donc être le seul critère pour une décision d'octroi de crédit. Bien des raisons en effet peuvent militer pour la mise en place d'une opération intrinsèquement non rentable. La première tient à la concurrence exacerbée qui existe sur l'activité du crédit. S'il est vrai que les récentes règles prudentielles ont clarifié les règles de la concurrence internationale, il est parfois nécessaire voire vital de faire preuve d'une certaine agressivité commerciale. Par ailleurs, il peut arriver qu'une banque ait un intérêt à conserver une relation car elle lui permet de récupérer d'énormes frais de gestion par ailleurs.

3.3. *Outil transactionnel et de gestion*

Si ces deux approches Raroc peuvent sembler antagonistes, elles sont en réalité complémentaires. Le mode transactionnel, également appelé calcul à l'origination, est directement associé à la demande de crédit. Il s'agit d'estimer de manière ex-ante la rentabilité d'une opération. De fait, les données utilisées seront des données prévisionnelles estimées par le secteur commercial aux vues de sa connaissance et de son analyse du client. En complément, l'utilisation du Raroc comme outil de gestion permet de réaliser un reporting régulier des niveaux de risques et donc un meilleur contrôle de ces derniers. L'analyse sera réalisée de façon ex post sur des données effectivement constatées et probablement récupérées d'un système d'information des engagements. Le tableau ci-dessous reprend les différentes caractéristiques exposées :

	Transactionnel	Gestion
Niveau	transaction/client	client/groupe/portefeuille
Fréquence	demande de crédit	mensuelle ou trimestrielle
Horizon	ex ante sur la durée des engagements	ex post sur un an par exemple
Données	prévisionnelles	réelles
Alimentation	manuelle	automatique
Détail	fin	grossier

3.4. Les différentes utilisations

Sur le plan commercial, de nombreuses banques utilisent aujourd'hui des outils basés sur une méthodologie de type Raroc. La mise en œuvre est effective à plusieurs niveaux. Sur un plan global, l'action commerciale peut, après avoir réalisé une segmentation de la clientèle en portefeuille, élaborer et proposer une offre personnalisée en fonction de la rentabilité du client. Par ailleurs, au niveau de la relation directe avec le client, le commercial qui dispose d'un outil de tarification de type Raroc calibré pour prendre en compte l'environnement concurrentiel, pourra proposer dans des délais relativement courts une offre personnalisée à son client.

Du point de vue du risk management, un outil de type Raroc nécessite que l'on porte une très grande attention aux différentes données utilisées. En effet, les résultats étant excessivement sensibles à certaines données, il est impératif que le risk management ait un dispositif de suivi du risque client efficace (*disclosure process*). Il ne faudrait pas par exemple qu'un client soit noté AA dans les systèmes alors que sa note s'est dégradée à A-. Toutefois, si les données dans les systèmes sont fiables, il est possible de générer avec un outil Raroc toute une série de reportings et ainsi de gérer des limites de concentration ou des consommations en coût du risque. Les reportings générés peuvent également être exploités lors des procédures budgétaires. On peut en effet allouer les budgets en fonction de la performance économique des différents départements ou définir leurs objectifs sur des critères Raroc.

La mise en œuvre d'un provisionnement ex ante est un sujet très sensible en raison de ses implications fiscales. Il s'agit de provisionner sur des bases statistiques le montant des pertes estimées au début de la période, le provisionnement actuel étant généralement réalisé de façon ex post. Or les provisions connaissent un traitement fiscal spécifique jusqu'à un certain seuil et les banques ne sont pas prêtes à dépasser ces seuils sans contrepartie. Au niveau d'une approche Raroc, l'indicateur de perte moyenne calculé sur le portefeuille global donne une bonne estimation du montant qu'il faudrait provisionner de façon ex ante. De fait, si en période de récession économique cet indicateur fournit des charges en risque estimées bien plus fortes que l'année précédente, il peut s'avérer important d'arbitrer entre fiscalité et couverture anticipée de la charge en risque.

Dans la pratique, les outils Raroc complètement intégrés sont relativement coûteux et lourds à mettre en place et à maintenir. Ils nécessitent des besoins techniques, intellectuels et humains très importants. Il convient donc, avant de se lancer dans une telle direction, de mesurer au préalable l'ampleur des coûts induits par une telle aventure. Avant toute chose, il est impératif qu'un établissement qui souhaite mettre en œuvre des outils de type Raroc pour ses différents marchés (grand corporate, upper/middle market, professionnel, etc.) ait au préalable un système d'information correctement alimenté. Par ailleurs, il faut aussi mettre l'accent sur la diffusion de l'information aux utilisateurs et à leur formation.

3.5. Calibration des outils Raroc

Dans les outils Raroc, nous rappelons que la modélisation des pertes L_i des différentes opérations financières est beaucoup plus fine que dans les calculs de capital réglementaire ou de gestion de portefeuille (utilisation d'échéanciers d'amortissement du capital et des garanties, prise en compte du risque de taux, etc.) et intègre de plus des éléments de rentabilité (modélisation des commissions et de l'imposition, prise en compte des coûts opérationnels et des revenus du side-business, etc.). Pour déterminer le Raroc d'une opération financière, nous devons calculer le coût du risque et la contribution en risque. Par définition, le coût du risque est l'espérance de la perte L_i qui est facile à calculer. Le calcul de la contribution en risque est plus difficile à réaliser, puisque l'expression de la perte L du portefeuille de la banque est relativement complexe. Puisque les outils Raroc utilisent l'unexpected loss pour mesurer le risque, nous avons théoriquement :

$$RC_i = \mathbb{E}[L_i | L = EL + UL] - \mathbb{E}[L_i]$$

L'idée est alors d'utiliser un proxy UL^* de l'unexpected loss défini comme un multiple de la volatilité de la perte du portefeuille :

$$UL^* = k \times \sigma(L)$$

Dans ce cas, la contribution en risque RC_i^* est la contribution de la volatilité $\sigma(L_i)$ de l'opération financière à la volatilité totale. Nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma(L) &= \frac{\text{cov}(L, L)}{\sigma(L)} \\ &= \frac{1}{\sigma(L)} \text{cov}\left(L, \sum_i L_i\right) \\ &= \sum_i \sigma(L_i) \frac{\text{cov}(L, L_i)}{\sigma(L) \sigma(L_i)} \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $\sigma(L) = \sum_i f_i \times \sigma(L_i)$ avec :

$$f_i = \frac{\text{cov}(L, L_i)}{\sigma(L) \sigma(L_i)}$$

f_i est souvent appelé le facteur de diversification. La décomposition précédente correspond au principe d'Euler de la covariance. Généralement, on suppose que le portefeuille (ou le portefeuille cible) est infiniment granulaire (objectif de diversification de la banque). Dans ce cas, et sous certaines hypothèses techniques, nous pouvons montrer que f_i est égal à $\sqrt{\rho^*}$ où ρ^* est la corrélation moyenne des différentes pertes L_i . Nous obtenons finalement l'expression suivante de la contribution en risque :

$$RC_i^* = k \times \sqrt{\rho^*} \times \sigma(L_i)$$

Nous remarquons que la contribution en risque dépend de deux paramètres inobservables k et $f = \sqrt{\rho^*}$. Il faut donc calibrer leurs valeurs. Ceci peut se faire en deux étapes :

1. k est déterminé de telle façon que la somme des contributions en risque Raroc soit égale à l'unexpected loss calculé avec le modèle de portefeuille ;
2. f est le rapport entre la volatilité de la perte du portefeuille et la somme des volatilités des pertes individuelles.

Cette procédure de calibration suppose de dégrader l'expression de pertes L_i de telle façon qu'il est possible de calculer facilement l'unexpected loss du portefeuille.

Pour donner quelques idées sur les valeurs prises par k et f , nous considérons l'exemple du modèle Bâle II. Nous rappelons que l'expression de la perte est :

$$L = \sum_{i=1}^n \text{EAD}_i \times \text{LGD}_i \times \mathbf{1} \{ \tau_i \leq T_i \}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \text{var}(L) &= \sum_{i=1}^n \text{EAD}_i^2 \left((\sigma^2 [\text{LGD}_i] + \mathbb{E}^2 [\text{LGD}_i]) \text{PD}_i - \mathbb{E}^2 [\text{LGD}_i] \text{PD}_i^2 \right) + \\ & 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \text{EAD}_i \text{EAD}_j \mathbb{E} [\text{LGD}_i] \mathbb{E} [\text{LGD}_j] (\text{PD}_{i,j} - \text{PD}_i \times \text{PD}_j) \end{aligned}$$

et :

$$\sigma(L_i) = \text{EAD}_i \sqrt{(\sigma^2 [\text{LGD}_i] + \mathbb{E}^2 [\text{LGD}_i]) \times \text{PD}_i - \mathbb{E}^2 [\text{LGD}_i] \times \text{PD}_i^2}$$

Plaçons-nous dans le cas infiniment granulaire. Nous avons

$$\text{UL} = \sum_{i=1}^n \text{EAD}_i \times \mathbb{E} [\text{LGD}_i] \times \left(\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\text{PD}_i) + \sqrt{\rho} \Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}} \right) - \text{PD}_i \right)$$

Prenons l'exemple d'un portefeuille contenant un million de créances de mêmes caractéristiques (l'exposition est fixée à 1 et la perte en cas de défaillance est non aléatoire et vaut 50%). Nous obtenons les résultats du tableau 4. Nous remarquons que k est une fonction décroissante de PD et une fonction croissante de la corrélation des actifs. Cela veut dire que le facteur d'échelle k est plus petit pour un portefeuille moins bien noté et/ou de maturité moyenne plus grande.

Remarque 113. Dans le cas d'un portefeuille infiniment granulaire et statistiquement homogène (c'est-à-dire avec une seule classe de risque et

Tableau 4. Paramètres Raroc k et f

PD (en pb)	ρ	k				f	$\rho^* = f^2$ (en %)
		99%	99,5%	99,9%	99,97%		
100	10%	3,8	4,7	7,0	8,9	0,097	0,94
500	10%	3,4	4,0	5,5	6,5	0,160	2,55
500	20%	3,8	4,6	6,4	7,7	0,240	5,78

une seule maturité), nous pouvons obtenir des formules analytiques. Par exemple, nous avons :

$$k = \frac{\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\text{PD}) + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}}\right) - \text{PD}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \mathbf{C}(\text{PD}, \text{PD}; \rho) - \left(\text{PD} - \frac{1}{n}\right) \text{PD} + \frac{\sigma^2[\text{LGD}]}{n \times \mathbb{E}^2[\text{LGD}]} \text{PD}}}$$

où \mathbf{C} est la copule Normale bivariée. Nous en déduisons que la valeur de k pour le portefeuille asymptotique est :

$$k = \frac{\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\text{PD}) + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}}\right) - \text{PD}}{\sqrt{\mathbf{C}(\text{PD}, \text{PD}; \rho) - \text{PD}^2}}$$

Pour le facteur de diversification, nous obtenons :

$$f = \sqrt{\frac{\mathbf{C}(\text{PD}, \text{PD}; \rho) - \text{PD}^2}{\frac{\sigma^2[\text{LGD}]}{\mathbb{E}^2[\text{LGD}]} \text{PD} + (\text{PD} - \text{PD}^2)}} \leq f^+ = \sqrt{\frac{\mathbf{C}(\text{PD}, \text{PD}; \rho) - \text{PD}^2}{\text{PD} - \text{PD}^2}}$$

Remarque 114. L'analyse précédente utilise un facteur de diversification unique et nous avons $\text{RC}_i^* = k \times f \times \sigma(L_i)$. Nous pouvons aussi utiliser un facteur de diversification différencié pour chaque créance. Nous avons alors $\text{RC}_i^* = k \times f_i \times \sigma(L_i)$. Par exemple, si nous utilisons le modèle Bâle II, f_i est calibré en posant :

$$f_i = \frac{\sigma(L_i)}{k \times \text{UL}_i} = \frac{\mathbb{E}[\text{LGD}_i] \times \left(\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\text{PD}_i) + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}}\right) - \text{PD}_i\right)}{k \times \sqrt{(\sigma^2[\text{LGD}_i] + \mathbb{E}^2[\text{LGD}_i]) \times \text{PD}_i - \mathbb{E}^2[\text{LGD}_i] \times \text{PD}_i^2}}$$

Conclusion

L'objet de la gestion de portefeuille est d'améliorer la qualité globale du portefeuille bancaire via des techniques d'assurance ou de diversification. Pour ce faire, il est nécessaire de posséder, en plus d'un outil de type Raroc, d'un bon modèle de corrélation qui permette de mesurer l'impact d'une politique de diversification sur le portefeuille.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	5
Préface	7
Introduction générale	11

Première partie Capital réglementaire et ratio international de solvabilité

Chapitre 1 – Le risque de marché	33
1. La réglementation prudentielle	33
1.1. Les normes générales	37
1.2. Les critères qualitatifs.....	37
1.3. Les critères quantitatifs.....	39
1.4. Simulations de crise.....	41
1.5. Traitement du risque spécifique	42
1.6. Dispositif prudentiel de contrôle ex post lié à l'utilisation des modèles internes.....	43
2. La valeur en risque.....	45
2.1. Définition	46
2.1.1. La <i>VaR</i> paramétrique	48

2.1.2.	La <i>VaR</i> historique	50
2.1.3.	La <i>VaR</i> Monte Carlo	51
2.2.	Les aspects réglementaires du calcul de la <i>VaR</i>	53
2.2.1.	Le seuil de confiance α	54
2.2.2.	Une explication du facteur complémentaire	55
2.2.3.	Le problème du scaling.....	56
2.3.	Les aspects méthodologiques.....	57
2.3.1.	L'intervalle de confiance d'une valeur en risque	57
2.3.2.	Le choix de la distribution de probabilité ..	61
2.3.3.	L'estimation de la matrice de covariance ..	68
2.4.	Les produits exotiques	69
2.4.1.	L'identification des facteurs de risque	70
2.4.2.	Les différentes méthodes pour calculer la <i>VaR</i>	71
2.4.3.	Le backtesting	72
2.4.4.	La gestion du risque de modèle des pro- duits exotiques.....	74
3.	Les programmes de stress-testing.....	75
3.1.	Définition	76
3.2.	Directions méthodologiques choisies par les ins- titutions bancaires.....	77
3.3.	L'approche historique	78
3.4.	Une approche subjective : le macro stress-testing ...	79
3.5.	La théorie des valeurs extrêmes	79
3.5.1.	Événements rares et hypothèse de nor- malité.....	81
3.5.2.	Les statistiques d'ordre	81
3.5.3.	La théorie asymptotique.....	89
	Conclusion	103
Chapitre 2 – Le risque de crédit		105
1.	Typologie du risque de crédit	105
2.	L'approche standard.....	107
2.1.	La réglementation prudentielle actuelle.....	107
2.2.	L'approche standard du ratio McDonough	109
2.2.1.	Les pondérations du risque	109
2.2.2.	Les notations externes.....	112
2.3.	Les procédures de réduction des risques dans l'approche SA du ratio McDonough	114
2.3.1.	Les transactions assorties de sûretés	114
2.3.2.	Les garanties et les dérivés de crédit	117
2.3.3.	Autres considérations.....	118
2.3.4.	Quelques exemples	119
3.	L'approche IRB du deuxième document consultatif	120
3.1.	Les principes généraux.....	120

3.2.	L'exemple de la méthode IRB pour les entreprises..	123
3.2.1.	Formulation des pondérations du risque ...	123
3.2.2.	Justification de la méthode IRB.....	126
3.3.	Granularité du portefeuille	133
3.3.1.	La méthodologie.....	134
3.3.2.	Un exemple numérique.....	135
3.3.3.	Dérivation du coefficient d'ajustement de granularité	137
3.3.4.	Bien comprendre la notion de granularité .	146
4.	L'approche IRB du Nouvel Accord de Bâle	149
4.1.	Les enseignements des QIS	150
4.2.	Le premier pilier et l'exigence minimale de fonds propres.....	153
4.2.1.	Les catégories <i>corporate risk</i> , <i>sovereign risk</i> et <i>banking risk</i>	154
4.2.2.	La catégorie <i>retail risk</i>	156
4.2.3.	Le risque <i>equity</i>	156
4.2.4.	Impact des nouvelles formules	156
4.3.	Le deuxième pilier et la surveillance prudentielle	157
4.4.	Le troisième pilier et la discipline de marché.....	158
	Conclusion	158

Chapitre 3 – Le risque opérationnel 159

1.	La définition du risque opérationnel	159
2.	Les différentes approches pour mesurer le risque opérationnel.....	163
2.1.	L'approche indicateur de base	163
2.2.	L'approche standardisée	164
2.3.	Les mesures AMA	165
3.	La méthode LDA	168
3.1.	Estimation de la distribution de sévérité.....	170
3.1.1.	Les méthode directes du maximum de vraisemblance ou des moments généralisés	170
3.1.2.	Hétérogénéité des données et biais de reporting (ou de collecte).....	172
3.1.3.	Comment corriger le biais de collecte?.....	173
3.2.	Estimation de la distribution de fréquence	174
3.3.	Calcul de la charge en capital.....	175
3.3.1.	Quelle est la définition de la charge en capital?	175
3.3.2.	Comment prendre en compte les assu- rances?.....	176
3.3.3.	Comment agréger les charges en capital? .	176
3.4.	Détermination des intervalles de confiance.....	179
3.4.1.	Distribution de l'estimateur de la charge en capital.....	179

3.4.2.	La question du nombre nécessaire de données	180
3.5.	Analyse de scénarios	182
Conclusion	184

Deuxième partie

Modélisation des risques multiples

Chapitre 4 – Les fonctions copules		187
1.	Représentation canonique d'une distribution de probabilité multidimensionnelle	187
1.1.	Théorème de Sklar	188
1.2.	Expression de la densité bidimensionnelle.....	189
1.3.	Premières propriétés des fonctions copules	191
1.4.	Extension au cas multidimensionnel	193
1.5.	Représentation graphique d'une copule	193
2.	Les classes de Fréchet	197
2.1.	Définition	197
2.2.	Ordre stochastique de concordance	198
3.	Copules et variables aléatoires.....	202
3.1.	Principaux résultats	202
3.2.	Composantes singulières.....	204
3.3.	Mesures de dépendance.....	208
3.4.	Et la corrélation ?	210
3.5.	Le tau de Kendall et le rho de Spearman	214
3.6.	La dépendance de queue	217
4.	Les copules paramétriques	219
4.1.	Les copules Archimédiennes	220
4.2.	La copule Normale	223
4.3.	La copule t de Student.....	226
4.4.	Comparaison des copules Normale et Student	228
4.5.	Copules paramétriques bivariées avec plusieurs paramètres.....	234
5.	Les copules de valeurs extrêmes.....	235
5.1.	Théorie des valeurs extrêmes multiples	236
5.2.	Caractérisation des domaines d'attraction	240
6.	Simulation et méthodes de Monte Carlo	242
6.1.	La méthode des distributions	242
6.2.	La méthode des distributions conditionnelles	243
6.3.	Les méthodes dites analytiques.....	246
6.4.	La méthode des quantiles empiriques	248
7.	Inférence statistique des copules	250
7.1.	La copule empirique de Paul Deheuvels	250
7.2.	L'identification d'une copule Archimédienne	253
7.3.	La méthode des moments	256

7.4.	La méthode du maximum de vraisemblance	257
7.5.	La méthode IFM.....	258
7.6.	L'estimateur omnibus	260
	Conclusion	263
Chapitre 5 – Aspects multidimensionnels du risque		265
1.	Agrégation des risques de marché	265
1.1.	L'effet de diversification	267
1.2.	L'influence de la dépendance.....	270
1.3.	Construire une VaR marché semi-historique	271
1.4.	L'agrégation des valeurs en risque.....	271
1.4.1.	Les inégalités de Makarov et les bornes de dépendance	272
1.4.2.	La borne supérieure de la valeur en risque VaR ($L_1 + L_2; \alpha$)	274
1.4.3.	Un exemple d'agrégation	278
2.	Construction et évaluation de scénarios de crise	279
2.1.	Rappel sur le cas unidimensionnel.....	279
2.2.	Le cas bidimensionnel	281
2.3.	Le cas multidimensionnel	282
3.	Risque de modèle et risque de paramètre	284
3.1.	Risque de paramètre dans le cas de deux actifs	284
3.2.	Risque de paramètre dans le cas de plusieurs actifs.	285
3.3.	Risque de modèle	286
4.	Calcul de la charge en capital pour le risque opérationnel ..	288
4.1.	La corrélation des fréquences	289
4.2.	La corrélation des pertes agrégées.....	291
5.	Modélisation de la corrélation dans les modèles de risque de crédit	293
5.1.	Le modèle de la firme	293
5.2.	Le modèle CreditMetrics	297
5.2.1.	La distribution de probabilité de transition	298
5.2.2.	Étude du cas bivarié	300
5.2.3.	Simulation de changement de rating	303
5.2.4.	Simulation de trajectoires dynamiques de rating	309
5.3.	L'approche par intensité.....	311
5.4.	Construction de fonctions de survie multidimen- sionnelle	315
5.4.1.	Copule de survie et fonction de survie multivariée	315
5.4.2.	Les copules Frailty	317
5.4.3.	Les statistiques d'ordre	319
	Conclusion	320

Troisième partie

Le risque de crédit

Chapitre 6 – Le marché du risque de crédit	323
1. Le marché des créances bancaires	324
2. Le marché des obligations risquées	325
2.1. Évolution récente du marché des obligations.....	326
2.1.1. Le volume d'émission	326
2.1.2. Le risque de défaut	326
2.2. Valorisation d'une obligation risquée	328
3. Le marché des dérivés de crédit et de la titrisation synthétique	333
3.1. Les dérivés de crédit	335
3.1.1. Les credit default swaps ou CDS.....	335
3.1.2. First-to-default ou FTD	338
3.2. Les produits structurés	339
3.2.1. Le tranching.....	339
3.2.2. Les CDO (collateralized debt obligations)	340
3.2.3. Le pricing	341
3.3. Le traitement prudentiel des dérivés de crédit.....	342
3.3.1. Le traitement prudentiel des instruments dérivés de crédit (Bulletin de la Com- mission Bancaire d'avril 1998)	344
3.3.2. Le traitement réglementaire dans les autres pays.....	348
3.4. L'utilisation des dérivés de crédit dans la gestion des risques	349
Conclusion	350
 Chapitre 7 – Les paramètres	 351
1. La probabilité de défaillance	351
1.1. La fonction de survie	352
1.2. Modélisation du temps de défaut	356
1.2.1. Les modèles à intensité.....	357
1.2.2. Les modèles de la firme (ou modèles structurels)	358
1.2.3. Les modèles à barrière de défaut.....	363
1.3. Générateur d'une chaîne de Markov et les ap- proches de migration de crédit	365
1.3.1. Modélisation des temps de défaut à par- tir d'un générateur	365
1.3.2. Estimation d'un générateur à partir d'une matrice de transition empirique	367
2. Le taux de recouvrement	371
2.1. Quelques statistiques	372
2.2. Modélisation stochastique.....	374

2.2.1.	Avec une distribution Bêta	375
2.2.2.	Avec une distribution discrète	378
2.2.3.	Un exemple	379
2.2.4.	Remarque sur la modélisation du taux de recouvrement dans le cas d'un por- tefeuille infiniment granulaire	380
3.	La dépendance des défaillances.....	382
3.1.	Les modèles de copule.....	383
3.1.1.	Un nouveau rappel sur les copules de survie	383
3.1.2.	La copule implicite du modèle de Bâle II..	384
3.1.3.	Mise en place d'un modèle copule avec des corrélations canoniques sectorielles.....	385
3.2.	Dualité entre le modèle de copule Normale et le modèle factoriel	389
3.3.	Les modèles de contagion	394
3.4.	L'estimation des corrélations de défaut	395
3.4.1.	Relations entre ces différentes corrélations	395
3.4.2.	Statistiques sur les corrélations de défaut .	397
3.4.3.	Économétrie des corrélations de défaut	398
	Conclusion	400
Chapitre 8 – Gestion du risque de crédit		401
1.	Calcul du capital économique.....	401
1.1.	La distribution de perte	402
1.2.	La mesure de risque.....	406
1.3.	La contribution en risque	408
1.4.	La sensibilité en risque.....	414
1.4.1.	L'exemple de la mesure ER	414
1.4.2.	La sensibilité en risque de la VaR crédit...	414
1.4.3.	Les autres techniques	420
1.5.	Retour sur le modèle Bâle II	421
2.	Gestion de portefeuille de crédit	422
2.1.	Le couple risque/rendement	423
2.2.	La frontière efficiente	426
2.2.1.	La méthode des simulations	426
2.2.2.	Les méthodes d'optimisation	426
2.3.	Les méthodes directionnelles	429
2.3.1.	La méthode des contributions.....	430
2.3.2.	La méthode des multiplicateurs de La- grange	430
2.4.	La prise en compte des dérivés de crédit	432
3.	L'approche Raroc.....	433
3.1.	Définitions	433
3.2.	Les indicateurs Raroc	435
3.3.	Outil transactionnel et de gestion	438

3.4. Les différentes utilisations	439
3.5. Calibration des outils Raroc	440
Conclusion	442
Conclusion générale	443
Bibliographie générale	445